

Wydział MiNI PW  
Geometria różniczkowa  
Zestaw zadań nr 1

10 października 2014

1. Wyznacz długość i krzywiznę następujących krzywych płaskich, gdzie  $a > 0$ :
  - (a)  $[0, 2\pi] \ni t \mapsto a(\cos t + t \sin t, \sin t - t \cos t) \in \mathbb{R}^2$
  - (b)  $[0, 2\pi] \ni t \mapsto a(\cosh(t/a), t) \in \mathbb{R}^2$ , gdzie  $\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$
  - (c)  $[0, 2\pi] \ni t \mapsto a(\cos^3 t, \sin^3 t) \in \mathbb{R}^2$  (asteroida)
  - (d)  $[-1, 1] \ni t \mapsto a(2t, t^2) \in \mathbb{R}^2$
  - (e)  $[0, 2\pi] \ni t \mapsto (t - \sin t, 1 - \cos t) \in \mathbb{R}^2$  (cykloida)
  - (f)  $[0, 2\pi] \ni t \mapsto (t - 3 \sin t, 1 - 3 \cos t) \in \mathbb{R}^2$
  - (g)  $[0, 2\pi] \ni t \mapsto (2t - \sin t, 2 - \cos t) \in \mathbb{R}^2$
  - (h)  $[0, 2\pi] \ni t \mapsto a\left(\frac{\cos t}{1 + \sin^2 t}, \frac{\sin t \cos t}{1 + \sin^2 t}\right) \in \mathbb{R}^2$  (leminiskata Bernoulliego)
  - (i)  $[0, 2\pi] \ni t \mapsto 2a(\cos t(1 + \cos t), \sin t(1 + \sin t)) \in \mathbb{R}^2$  (kardioida)
2. Znajdź parametryzację łukową, pole styczne i normalne oraz krzywiznę krzywej  $(0, 1) \in t \mapsto (t^2, t^3) \in \mathbb{R}^3$
3. Niech  $\gamma_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  będzie krzywą oparametryzacji

$$\gamma_a(t) = \begin{cases} (t, t^a \sin(1/t)) & \text{dla } t \neq 0 \\ (0, 0) & \text{dla } t = 0 \end{cases}$$

Pokazać, że

- (a)  $\gamma_a$  jest ciągłą dla  $a > 0$  i nie jest ciągła dla  $a \leq 0$ ,
  - (b)  $\gamma_a$  jest różniczkowalna dla  $a \in (1, 2)$ , ale nie jest klasy  $C^1$ .
4. Znajdź parametryzację krzywej Vivianiego, która powstaje z przecięcia walca  $(x - a)^2 = y^2 = a^2$  i sfery  $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ . Wyznacz pole

styczne, normalne i binormalne, krzywiznę i skręcenie krzywej. Przed liczeniem krzywizny oszacuj jej wartość korzystając z twierdzenia podanego na wykładzie.

5. Wyznacz pole styczne, normalne i binormalne, krzywiznę i skręcenie następujących krzywych:

(a)  $\mathbb{R} \ni t \mapsto (3t - t^3, 3t^3, 3t + t^3) \in \mathbb{R}^3$

(b)  $[0, 2\pi] \ni t \mapsto (a \cos^n t, b \sin^n t, \cos(2t)) \in \mathbb{R}^3$

(c)  $[0, 2\pi] \ni t \mapsto (a \cos t, b \sin t, ct) \in \mathbb{R}^3$