# Wydział MiNI PW
# Geometria różniczkowa
# Zestaw zadań nr 2

22 października 2014

1. Niech $t \mapsto \gamma(t)$ będzie krzywą. Załóżmy, że nić o długości $C$ jest nawinięta na krzywą i zaczepiona w punkcie $l(t_C) = C$, gdzie $l$ jest długością łuku krzywej $\gamma$. Rozwijamy nić tak, żeby byłą cały czas naprężona. Wtedy jej niezaczepiony koniec będzie znajdował się w odległości $l(t)$ od punktu $\gamma(t)$ w kierunku $-\gamma'(t)$. Krzywą, która zakreśla ten niezaczepiony koniec nazywamy *ewolwentą* krzytwej $\gamma$. Pokazać, że ewolwenta $\gamma$ jest dana wzorem:
$$\mathcal{I}(t) = \gamma(t) - l(t)\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}.$$

2. Wyznacz ewolwenty następujących krzywych
   (a) okręgu o promieniu $r$ i środku $(0, 0)$
   (b) linii śrubowej

3. Pokazać, że krzywizna ewolwenty krzywej $\gamma$ jest dana wzorem
$$\kappa_{\mathcal{I}}(t) = \frac{\sqrt{\kappa_\gamma^2(t) + \tau_\gamma^2(t)}}{l_\gamma(t)\kappa_\gamma(t)}.$$

4. Jak wygłada wzór na krzywiznę ewolwenty krzywej płaskiej.

5. *Płaską ewolutą* krzywej płaskiej $\gamma$ nazywamy krzywą, której ewolwentą jest $\gamma$. Wykazać, że ewoluta, krzywej $\gamma$ ma postać
$$\mathcal{E}(t) = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)}\mathbf{n}(t).$$

6. Znaleźć ewolutę płaską
   (a) paraboli $y^2 = 2ax$
   (b) elipsy $t \mapsto (a\cos(t), b\sin(t))$

(c) krzywej łańcuchowej $t \mapsto (t, \cosh t)$

(d) asteroidy $t \mapsto (a \cos^3 t, b \sin^3 t)$