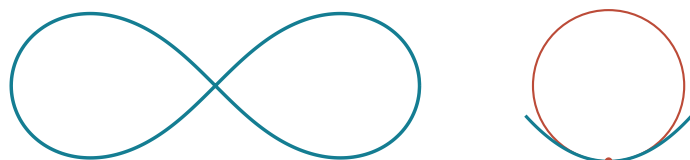


Krzywe płaskie

Wojciech Domitrz

Geometria różniczkowa



Konwencja obowiązująca w całym tekście. Płaszczyzna ma standardową orientację. Normalną wybieramy po lewej stronie kierunku ruchu. Symbol κ oznacza *krzywiznę ze znakiem*; krzywizna bez znaku to $|\kappa|$. Odwrócenie orientacji krzywej zmienia znak κ .

Spis treści

1	Trzy sposoby opisu krzywej	2
2	Parametryzacje i osobliwości	4
3	Długość krzywej i parametr długości łuku	8
4	Krzywizna ze znakiem	10
5	Okrąg ściśle styczny	13
6	Kontakt dwóch krzywych	14
7	Krzywe zamknięte, pole i nierówność izoperymetryczna	16
8	Zestaw wzorów i krótkie ćwiczenia	18

1 Trzy sposoby opisu krzywej

Przez $I \subset \mathbb{R}$ rozumiemy przedział, a przez $D \subset \mathbb{R}^2$ zbiór otwarty. Domyślnie funkcje są klasy C^∞ ; tam, gdzie wystarcza słabsza regularność, podajemy ją w założeniach. Gładkość na przedziale domkniętym oznacza istnienie gładkiego przedłużenia do jego otoczenia.

1.1 Wykres, równanie uwikłane, parametryzacja

1. Wykres funkcji:

$$\text{graph } f = \{(x, f(x)) : x \in I\}, \quad f : I \rightarrow \mathbb{R}.$$

Nie każda krzywa jest globalnie wykresem jednej funkcji $y = f(x)$. Na przykład okrąg $x^2 + y^2 = 1$ ma dla $-1 < x < 1$ dwie wartości y .

2. Równanie uwikłane:

$$C = \{(x, y) \in D : F(x, y) = 0\} = F^{-1}(0), \quad F : D \rightarrow \mathbb{R}.$$

Wykres f otrzymujemy dla $F(x, y) = y - f(x)$. Sam warunek gładkości F nie gwarantuje, że $F^{-1}(0)$ jest krzywą regularną: może to być punkt, zbiór pusty, cały obszar lub zbiór z osobliwościami.

3. Parametryzacja:

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (x(t), y(t)).$$

Należy rozróżniać odwzorowanie γ od jego obrazu $\gamma(I)$, zwanego *śladem*. Ten sam ślad można przebiegać z różną prędkością, w przeciwnych kierunkach lub wielokrotnie.

1.2 Kiedy równanie opisuje krzywą regularną?

Twierdzenie 1.1 (O funkcji uwikłanej, wersja dla krzywych). *Niech $F \in C^k(D)$, $k \geq 1$, oraz $F(x_0, y_0) = 0$. Jeżeli $F_y(x_0, y_0) \neq 0$, to istnieją otoczenia I punktu x_0 i J punktu y_0 oraz jednoznaczna funkcja $f \in C^k(I)$ taka, że*

$$\{F = 0\} \cap (I \times J) = \{(x, f(x)) : x \in I\}.$$

Ponadto $f'(x) = -F_x(x, f(x))/F_y(x, f(x))$. Jeżeli $F_x(x_0, y_0) \neq 0$, analogicznie można rozwiązać równanie w postaci $x = g(y)$.

Uzasadnienie na podstawie twierdzenia o funkcji odwrotnej. Dla $H(x, y) = (x, F(x, y))$ mamy $\det DH(x_0, y_0) = F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Lokalna odwrotność H ma postać $(u, v) \mapsto (u, h(u, v))$. Wystarczy przyjąć $f(u) = h(u, 0)$. Różniczkując $F(x, f(x)) = 0$, otrzymujemy wzór na f' . Drugi przypadek wynika z zamiany współrzędnych. $\square$

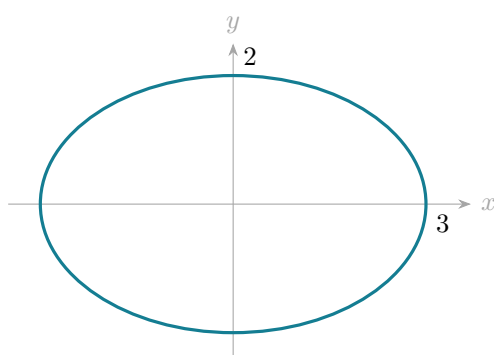
Definicja 1.2. Punkt $p \in F^{-1}(0)$ jest *regularny dla równania $F = 0$* , gdy $\nabla F(p) \neq 0$. Jeżeli $\nabla F(p) = 0$, jest *osobliwy dla tego równania*. Jeśli gradient nie znika na całym $F^{-1}(0)$, zbiór ten jest, o ile jest niepusty, gładką jednowymiarową podrozmiernością płaszczyzny. Może mieć kilka składowych.

Zerowy gradient nie rozstrzyga o geometrii śladu. Równania $y = 0$ oraz $y^2 = 0$ opisują tę samą gładką prostą, lecz gradient drugiej funkcji znika w każdym jej punkcie. Warunek $\nabla F \neq 0$ jest wystarczający do regularności śladu; jego niespełnienie dla wybranego F samo w sobie nie dowodzi osobliwości geometrycznej.

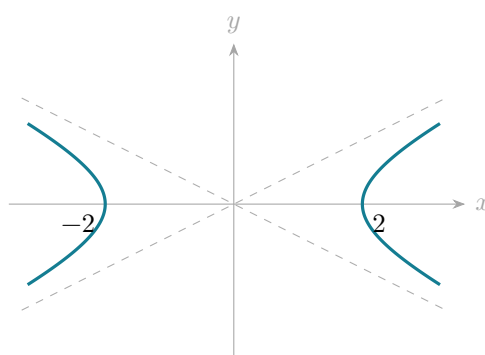
1.3 Klasyczne przykłady

Zakładamy $a, b > 0$. Wszystkie potęgi i parametry w poniższych wzorach są ustalone tak, aby opis uwikłany i parametryczny były zgodne.

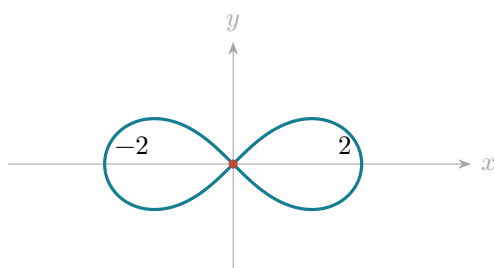
Krzywa	Równanie
Elipsa	$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$
Hiperbola	$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$
Lemniskata Bernoulliego	$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$
Asteroida	$(a^2 - x^2 - y^2)^3 = 27a^2x^2y^2$, równoważnie $ x ^{2/3} + y ^{2/3} = a^{2/3}$



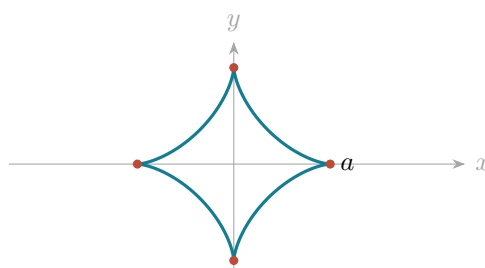
Elipsa: $a = 3, b = 2$



Hiperbola: $a = 2, b = 1$



Lemniskata: $a = 2$



Asteroida: $a = 3/2$

Rysunek 1: Klasyczne krzywe płaskie. W każdym panelu skale osi są jednakowe. Czerwone punkty wskazują samoprzecięcie lemniskaty i ostrza asteroidy.

Przykład 1.3 (Lemniskata jako miejsce geometryczne). Niech $A_{\pm} = (\pm a/\sqrt{2}, 0)$ oraz $P = (x, y)$. Wtedy

$$|P - A_+|^2 |P - A_-|^2 = \left(x^2 + y^2 + \frac{a^2}{2} \right)^2 - 2a^2 x^2.$$

Warunek $|P - A_+| |P - A_-| = a^2/2$ jest zatem równoważny równaniu lemniskaty. Kwadratujemy tu liczby nieujemne, więc nie wprowadzamy dodatkowych rozwiązań.

2 Parametryzacje i osobliwości

2.1 Regularność i zmiana parametru

Definicja 2.1. Krzywa parametryczna $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^2)$ jest *regularna* w parametrze t_0 , jeżeli $\dot{\gamma}(t_0) \neq 0$. Jest regularna na I , gdy warunek ten zachodzi dla każdego $t \in I$. Parametr t_0 z $\dot{\gamma}(t_0) = 0$ nazywamy parametrem osobliwym.

Kropka oznacza pochodną względem dowolnego parametru t . W kolejnych rozdziałach prim przy krzywej parametryzowanej długością łuku będzie oznaczał pochodną względem s .

Przykład 2.2 (Osobliwość parametryzacji a ślad). Parametryzacja $\gamma(t) = (t^3, 0)$ ma $\dot{\gamma}(0) = 0$, ale jej ślad jest gładką prostą, którą można opisać regularnie przez $\alpha(u) = (u, 0)$. Przejście $t \mapsto t^3$ nie jest dyfeomorfizmem w otoczeniu zera: odwrotność nie jest tam różniczkowalna. Z kolei regularna krzywa może mieć samoprzecięcia — przykładem będzie lemniskata.

Definicja 2.3. *Regularna zmiana parametru* to dyfeomorfizm $\varphi : J \rightarrow I$. Nowa parametryzacja ma postać $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$. Jeśli $\varphi' > 0$, zachowuje orientację; jeśli $\varphi' < 0$, odwraca ją. Na spójnym przedziale znak pochodnej dyfeomorfizmu jest stały.

Z reguły łańcuchowej

$$\dot{\tilde{\gamma}}(u) = \dot{\gamma}(\varphi(u))\varphi'(u),$$

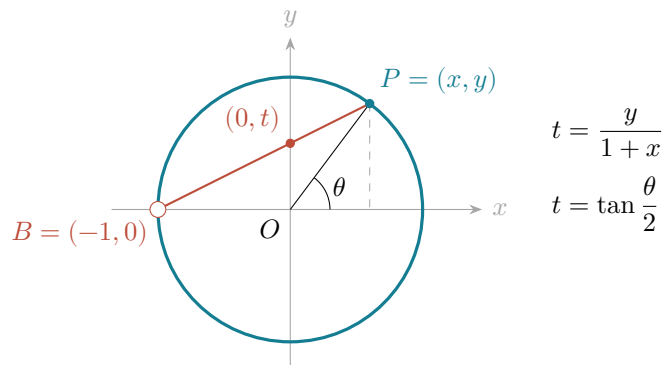
więc taka zmiana parametru zachowuje regularność. W szczególności wykres $f \in C^1$ ma zawsze regularną parametryzację $(t, f(t))$.

2.2 Okrąg: parametryzacja trygonometryczna i wymierna

Okrąg jednostkowy ma parametryzację $\alpha(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$. Dla $\theta \in [0, 2\pi]$ otrzymujemy jeden obieg, z utożsamieniem końców przedziału. Podstawienie $t = \tan(\theta/2)$ daje

$$\gamma(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Bezpośrednio sprawdzamy $x(t)^2 + y(t)^2 = 1$ oraz $\|\dot{\gamma}(t)\| = 2/(1+t^2) > 0$. **Ta parametryzacja pomija punkt $(-1, 0)$** , osiąganym jedynie jako granica dla $t \rightarrow \pm\infty$. Dla pozostałych punktów odwrotność to $t = y/(1+x)$.



Rysunek 2: Konstrukcja parametryzacji wymiernej: prosta przez B i P przecina oś y w punkcie $(0, t)$. Punkt B jest wyłączony.

2.3 Elipsa i obie gałęzie hiperboli

Elipsa ma parametryzację

$$\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad \|\dot{\gamma}\|^2 = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t > 0.$$

Hiperbolę opisują *dwie* parametryzacje

$$\gamma_+(t) = (a \cosh t, b \sinh t), \quad \gamma_-(t) = (-a \cosh t, b \sinh t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tożsamość $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ sprawdza równanie hiperboli. Żadna ciągła parametryzacja z jednego przedziału nie opisze obu rozłącznych gałęzi, gdyż ciągły obraz zbioru spójnego jest spójny.

2.4 Lemniskata: regularna parametryzacja z samoprzecięciem

$$\gamma(t) = \left(\frac{a \cos t}{1 + \sin^2 t}, \frac{a \sin t \cos t}{1 + \sin^2 t} \right), \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (2.2)$$

Po podstawieniu dostajemy

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2 \cos^2 t}{1 + \sin^2 t}, \quad x^2 - y^2 = \frac{a^2 \cos^4 t}{(1 + \sin^2 t)^2},$$

a więc $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$. Różniczkowanie daje

$$\dot{x} = -\frac{a \sin t(3 - \sin^2 t)}{(1 + \sin^2 t)^2}, \quad \dot{y} = \frac{a(1 - 3 \sin^2 t)}{(1 + \sin^2 t)^2}, \quad \|\dot{\gamma}\| = \frac{a}{\sqrt{1 + \sin^2 t}} > 0.$$

Mimo regularności $\gamma(\pi/2) = \gamma(3\pi/2) = (0, 0)$. Odpowiednie wektory styczne to $(-a/2, -a/2)$ i $(a/2, -a/2)$: gałęzie przecinają się poprzecznie, ze stycznymi $y = x$ i $y = -x$.

Dla funkcji $F = (x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2)$ poprawne pochodne wynoszą

$$F_x = 4x(x^2 + y^2) - 2a^2x, \quad F_y = 4y(x^2 + y^2) + 2a^2y.$$

Jedynym punktem zbioru $F = 0$, w którym obie znikają, jest $(0, 0)$. Tutaj osobliwość śladu jest rzeczywista: dwie poprzeczne gałęzie nie tworzą lokalnie jednej gładkiej podrozmaitości.

2.5 Asteroida i toczący się okrąg

Asteroida ma parametryzację

$$\gamma(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t), \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (2.3)$$

Spełnia równanie z rozdziału 1, ponieważ $1 - \cos^6 t - \sin^6 t = 3 \cos^2 t \sin^2 t$. Ponadto

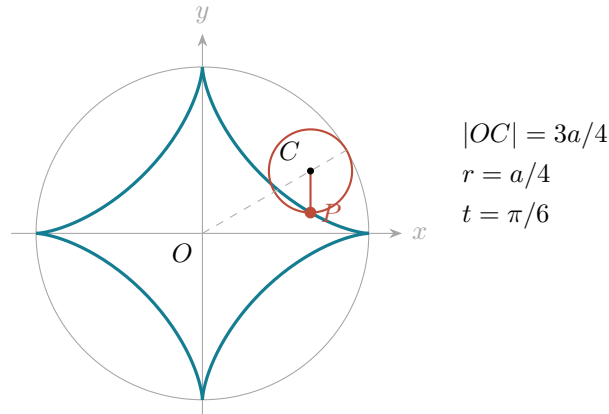
$$\dot{\gamma}(t) = 3a \sin t \cos t (-\cos t, \sin t), \quad \|\dot{\gamma}(t)\| = 3a |\sin t \cos t|.$$

Pochodna znika dokładnie dla $t \in (\pi/2)\mathbb{Z}$. Odpowiadają im cztery ostrza $(\pm a, 0)$ i $(0, \pm a)$.

Geometrycznie jest to tor punktu okręgu o promieniu $a/4$, toczącego się bez poślizgu wewnątrz okręgu o promieniu a . Gdy środek ma kąt biegunowy t , położenie zaznaczonego punktu wynosi

$$\left(\frac{3a}{4} \cos t + \frac{a}{4} \cos 3t, \frac{3a}{4} \sin t - \frac{a}{4} \sin 3t \right) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t).$$

Kąt obrotu zaznaczonego promienia ma przeciwny zwrot i wartość $3t$; wynika to z warunku toczenia oraz ilorazu $(a - a/4)/(a/4) = 3$.



Rysunek 3: Konstrukcja asteroidy dla $a = 2$. Czerwony punkt należy do toczącego się okręgu i kreśli turkusową krzywą.

2.6 Zwykle ostrze i kryterium pochodnych

Definicja 2.4. Gładka krzywa ma w parametrze t_0 *zwykle ostrze* (ang. *ordinary cusp*), jeśli po lokalnej dyfeomorficznej zmianie parametru $t = \varphi(u)$, $\varphi(0) = t_0$, i lokalnej dyfeomorficznej zmianie współrzędnych Φ na płaszczyźnie otrzymujemy

$$\Phi(\gamma(\varphi(u))) = (u^2, u^3), \quad \Phi(\gamma(t_0)) = (0, 0).$$

Zmiany współrzędnych w tej definicji nie muszą być izometriami.

Lemat Hadamarda (Wersja jednowymiarowa). *Niech $f \in C^\infty((-\varepsilon, \varepsilon))$ i $f(0) = 0$. Istnieje dokładnie jedna funkcja gładka g na tym przedziale taka, że*

$$f(t) = t g(t), \quad g(0) = f'(0).$$

Ogólniej, jeśli dla pewnej liczby całkowitej $m \geq 1$ zachodzi $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(m-1)}(0) = 0$, to

$$f(t) = t^m g_m(t), \quad g_m \in C^\infty((-\varepsilon, \varepsilon)), \quad g_m(0) = \frac{f^{(m)}(0)}{m!}.$$

Dowód. Z podstawowego twierdzenia rachunku całkowego, także dla $t < 0$,

$$f(t) = f(t) - f(0) = \int_0^t f'(u) du = t \int_0^1 f'(\lambda t) d\lambda.$$

Definiujemy więc $g(t) = \int_0^1 f'(\lambda t) d\lambda$. Można ją różniczkować dowolnie wiele razy pod znakiem całki:

$$g^{(j)}(t) = \int_0^1 \lambda^j f^{(j+1)}(\lambda t) d\lambda, \quad j \geq 0.$$

Stąd gładkość g oraz $g(0) = f'(0)$. Dla $t \neq 0$ koniecznie $g(t) = f(t)/t$, a wartość w zerze jest wyznaczona przez ciągłość; dowodzi to jednoznaczności.

Jeśli znikają pochodne f do rzędu $m-1$, to powyższy wzór daje $g^{(j)}(0) = f^{(j+1)}(0)/(j+1) = 0$ dla $0 \leq j \leq m-2$. Możemy zatem powtórzyć rozumowanie i wyłączyć łącznie m czynników t . Zróżniczkowanie $f(t) = t^m g_m(t)$ m razy w zerze daje $f^{(m)}(0) = m! g_m(0)$. $\square$

Twierdzenie 2.5 (Kryterium zwykłego ostrza). *Gładka krzywa ma zwykle ostrze w t_0 wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\dot{\gamma}(t_0) = 0, \quad \det(\ddot{\gamma}(t_0), \ddot{\gamma}(t_0)) \neq 0.$$

Dowód. Dla modelu (u^2, u^3) drugą i trzecią pochodną w zerze są $(2, 0)$ i $(0, 6)$. Przy zmianie parametru, w punkcie z $\dot{\gamma} = 0$,

$$(\gamma \circ \varphi)'' = \ddot{\gamma}(\varphi')^2, \quad (\gamma \circ \varphi)''' = \ddot{\gamma}(\varphi')^3 + 3\ddot{\gamma}\varphi'\varphi''.$$

Wyznacznik mnoży się przez $(\varphi')^5 \neq 0$. Przy dyfeomorfizmie płaszczyzny obie pochodne mnożą się przez $D\Phi$, więc wyznacznik mnoży się przez $\det D\Phi \neq 0$. To dowodzi konieczności.

Dla dostateczności przesuwamy parametr i punkt do zera. Liniową zmianą współrzędnych zapewniamy $x''(0) > 0$, $y''(0) = 0$ i $y'''(0) \neq 0$. Ponieważ $x(0) = x'(0) = 0$, lemat Hadamarda dla $m = 2$ daje $x(t) = t^2 a(t)$ z gładką funkcją a oraz $a(0) = x''(0)/2 > 0$. Po zmniejszeniu otoczenia zera mamy $a(t) > 0$. Zmiana $u = t\sqrt{a(t)}$ ma w zerze pochodną $\sqrt{a(0)} > 0$, jest więc lokalnym dyfeomorfizmem i daje $x = u^2$. Dla drugiej współrzędnej stosujemy standardowy lemat o rozkładzie funkcji gładkiej na część parzystą i nieparzystą: można zapisać

$$y(u) = E(u^2) + uO(u^2)$$

z gładkimi E, O w otoczeniu zera. Warunki na pochodne dają $E(0) = E'(0) = O(0) = 0$ oraz $O'(0) \neq 0$. Ponownie stosujemy lemat Hadamarda: $O(v) = vB(v)$, gdzie B jest gładka i $B(0) = O'(0) \neq 0$. Zatem $y(u) = E(u^2) + u^3 B(u^2)$. Dyfeomorfizm

$$(X, Y) \mapsto \left(X, \frac{Y - E(X)}{B(X)} \right)$$

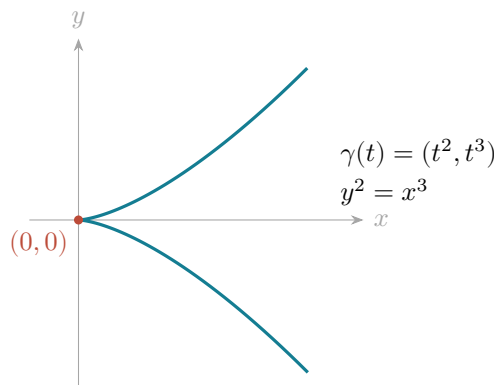
sprowadza krzywą do (u^2, u^3) . □

Uwaga 2.6. Użyty lemat mówi, że gładka funkcja parzysta $h(u)$ jest lokalnie postaci $H(u^2)$ z gładkim H (po przedłużeniu z półosi). Stosuje się go do $[y(u) + y(-u)]/2$ oraz do gładkiej funkcji parzystej $[y(u) - y(-u)]/(2u)$.

Przykład 2.7. Dla $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ mamy $\dot{\gamma}(0) = 0$ i wyznacznik równy 12. Dla asteroidy w $t = 0$:

$$\ddot{\gamma}(0) = (-3a, 0), \quad \ddot{\gamma}(0) = (0, 6a), \quad \det(\ddot{\gamma}(0), \ddot{\gamma}(0)) = -18a^2 \neq 0.$$

Symetria daje taki sam typ osobliwości w pozostałych trzech wierzchołkach.



Rysunek 4: Zwykłe ostrze. Obie części krzywej mają w początku tę samą prostą styczną, ale parametryzacja nie jest tam regularna.

3 Długość krzywej i parametr długości łuku

3.1 Definicja i wzór całkowy

Definicja 3.1. Długością ciągłej krzywej $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ nazywamy

$$L(\gamma) = \sup_{\mathcal{P}} \sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|,$$

gdzie supremum bierzemy po wszystkich podziałach $\mathcal{P} : a = t_0 < \dots < t_n = b$. Jeżeli $L(\gamma) < \infty$, krzywa jest *prostowalna*.

Twierdzenie 3.2 (Długość krzywej klasy C^1). Dla $\gamma \in C^1([a, b], \mathbb{R}^2)$ zachodzi

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt. \quad (3.1)$$

Regularność nie jest do tego wzoru potrzebna. Wzór obowiązuje też dla krzywych kawałkami klasy C^1 , po zsumowaniu całek.

Dowód. Ponieważ $\gamma(v) - \gamma(u) = \int_u^v \dot{\gamma}(t) dt$, nierówność trójkąta daje, dla dowolnego podziału $\mathcal{P} : a = t_0 < \dots < t_n = b$,

$$\sum_{i=1}^n \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

Po wzięciu supremum po podziałach otrzymujemy $L(\gamma) \leq \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$.

Dla nierówności odwrotnej używamy jednostajnej ciągłości pochodnej na przedziale domkniętym $[a, b]$. Wprowadzamy jej *moduł ciągłości*

$$\omega(\delta) = \sup\{\|\dot{\gamma}(u) - \dot{\gamma}(v)\| : u, v \in [a, b], |u - v| \leq \delta\}.$$

Jednostajna ciągłość oznacza, że $\omega(\delta) \rightarrow 0$, gdy $\delta \rightarrow 0^+$: pochodna na krótkim przedziale zmienia się niewiele, a oszacowanie jest wspólne dla wszystkich miejsc na krzywej.

Jeśli oczka podziału mają długość co najwyżej δ , to dla $h_i = t_i - t_{i-1} \leq \delta$ odejmujemy i dodajemy w całce stały wektor $\dot{\gamma}(t_{i-1})$:

$$\begin{aligned} \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\gamma}(u) du \\ &= h_i \dot{\gamma}(t_{i-1}) + R_i, \\ R_i &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\dot{\gamma}(u) - \dot{\gamma}(t_{i-1})) du. \end{aligned}$$

Pierwszy składnik opisuje ruch ze stałą prędkością równą pochodnej na początku oczka; R_i jest wektorowym błędem tego przybliżenia. Dla każdego $u \in [t_{i-1}, t_i]$ zachodzi $|u - t_{i-1}| \leq h_i \leq \delta$, zatem z definicji ω i nierówności trójkąta dla całki otrzymujemy

$$\|R_i\| \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot{\gamma}(u) - \dot{\gamma}(t_{i-1})\| du \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} \omega(\delta) du = \omega(\delta) h_i.$$

Teraz stosujemy *odwrotną nierówność trójkąta* $\|A + B\| \geq \|A\| - \|B\|$. Ponieważ $h_i > 0$, mamy

$$\begin{aligned} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| &= \|h_i \dot{\gamma}(t_{i-1}) + R_i\| \\ &\geq h_i \|\dot{\gamma}(t_{i-1})\| - \|R_i\| \\ &\geq \|\dot{\gamma}(t_{i-1})\| (t_i - t_{i-1}) - \omega(\delta)(t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

Otrzymujemy więc dolne oszacowanie długości cięciwy przez długość ruchu ze stałą prędkością, pomniejszoną o kontrolowany błąd.

Sumujemy po i . Oznaczając długość wpisanej łamanej przez $\ell(\mathcal{P})$ i korzystając z $\sum_i h_i = b - a$, dostajemy

$$L(\gamma) \geq \ell(\mathcal{P}) \geq \sum_{i=1}^n \|\dot{\gamma}(t_{i-1})\| h_i - (b-a)\omega(\delta).$$

Wybieramy teraz ciąg podziałów o maksymalnej długości oczka dążącej do zera, na przykład podziały na n równych części, dla których $\delta_n = (b-a)/n$. Suma po prawej jest sumą Riemanna ciągłej funkcji $t \mapsto \|\dot{\gamma}(t)\|$, więc dąży do jej całki. Jednocześnie $(b-a)\omega(\delta_n) \rightarrow 0$. W granicy otrzymujemy $L(\gamma) \geq \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$, co wraz z pierwszą nierównością dowodzi równości. $\square$

Stwierdzenie 3.3 (Niezmienność długości). *Długość nie zmienia się przy regularnej zmianie parametru, niezależnie od tego, czy zachowuje ona orientację.*

Dowód. Z reguły łańcuchowej $\|(\gamma \circ \varphi)'(u)\| = \|\dot{\gamma}(\varphi(u))\| |\varphi'(u)|$. Teza wynika ze wzoru na podstawienie w całce. $\square$

Uwaga 3.4. Długość uwzględnia liczbę przebiegów. Na przykład $\gamma(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$ dla $t \in [0, 2\pi]$ ma długość 4π , chociaż obwód jej śladu wynosi 2π .

3.2 Wykres i współrzędne biegunowe

Dla wykresu $y = f(x)$ wzór (3.1) przyjmuje postać

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Jeśli $\gamma(\theta) = (r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta)$, to

$$\dot{x} = r' \cos \theta - r \sin \theta, \quad \dot{y} = r' \sin \theta + r \cos \theta,$$

stąd $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (r')^2 + r^2$ i

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2} d\theta.$$

Przykład 3.5 (Długość asteroidy). Ze wzoru na prędkość asteroidy i z jej symetrii otrzymujemy

$$L = 4 \int_0^{\pi/2} 3a \sin t \cos t dt = 6a.$$

Ostrza nie przeszkadzają w obliczeniu długości.

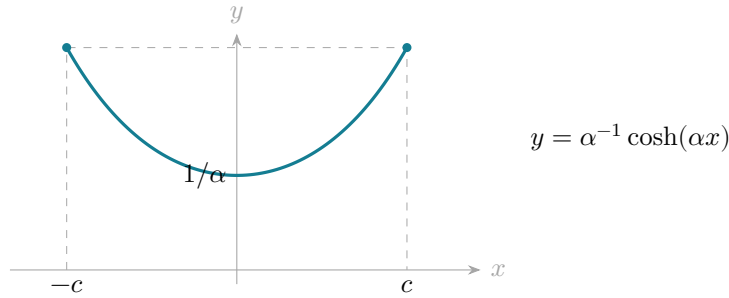
Przykład 3.6 (Krzywa łańcuchowa). Dla $\alpha > 0$, $c > 0$ rozważmy $y = \alpha^{-1} \cosh(\alpha x)$, $x \in [-c, c]$. Wtedy

$$L = \int_{-c}^c \sqrt{1 + \sinh^2(\alpha x)} dx = \int_{-c}^c \cosh(\alpha x) dx = \frac{2}{\alpha} \sinh(\alpha c).$$

Dla każdej zadanej długości $\ell > 2c$ istnieje dokładnie jedna $\alpha > 0$, która spełnia ten wzór. Istotnie, po podstawieniu $z = \alpha c$ badamy $\sinh z/z$ na $(0, \infty)$:

$$\left(\frac{\sinh z}{z} \right)' = \frac{z \cosh z - \sinh z}{z^2} > 0,$$

gdyż licznik ma w zerze granicę 0, a jego pochodna to $z \sinh z > 0$. Ponadto $\sinh z/z \rightarrow 1$ dla $z \rightarrow 0^+$ i dąży do nieskończoności dla $z \rightarrow \infty$. Przypadek $\ell = 2c$ odpowiada granicznie odcinkowi po odpowiednim przesunięciu pionowym; dla $\ell < 2c$ rozwiązanie nie istnieje.



Rysunek 5: Krzywa łańcuchowa między podporami o jednakowej wysokości. Na rysunku $\alpha = 1$, $c = 3/2$.

3.3 Parametryzacja długością łuku

Twierdzenie 3.7. *Każda regularna krzywa klasy C^k , $k \geq 1$, dopuszcza parametryzację długością łuku. Dla $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiujemy*

$$s(t) = \int_a^t \|\dot{\gamma}(u)\| \, du, \quad L = s(b).$$

Funkcja $s : [a, b] \rightarrow [0, L]$ jest ściśle rosnąca, ma odwrotność $t = t(s)$, a $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$ spełnia $\|\tilde{\gamma}'(s)\| = 1$.

Dowód. Mamy $ds/dt = \|\dot{\gamma}(t)\| > 0$, więc twierdzenie o funkcji odwrotnej daje gładką odwrotność odpowiedniej klasy. Reguła łańcuchowa prowadzi do

$$\tilde{\gamma}'(s) = \dot{\gamma}(t(s)) \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{\gamma}(t(s))}{\|\dot{\gamma}(t(s))\|},$$

której norma wynosi 1. □

Odwrotnie, przy jednostkowej prędkości długość od parametru s_0 do $s \geq s_0$ wynosi $s - s_0$. Parametr długości łuku jest wyznaczony z dokładnością do przesunięcia, a przy dopuszczeniu zmiany orientacji także do zmiany znaku.

Przykład 3.8 (Jawna zmiana parametru dla krzywej łańcuchowej). Wybierając początek pomiaru łuku przy $x = 0$, otrzymujemy podpisany parametr $s(x) = \sinh(\alpha x)/\alpha$. Stąd

$$x(s) = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arsinh}(\alpha s), \quad y(s) = \frac{1}{\alpha} \sqrt{1 + \alpha^2 s^2}.$$

Sprawdzenie $x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$ potwierdza jednostkową prędkość. Dla $s < 0$ rzeczywista długość od punktu środkowego wynosi $|s|$.

4 Krzywizna ze znakiem

4.1 Styczna, lewa normalna i wzory Freneta

Niech $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ będzie krzywą klasy C^2 parametryzowaną długością łuku. Definiujemy

$$\mathbf{T} = \gamma' = (x', y'), \quad \mathbf{N} = \mathbf{J}\mathbf{T} = (-y', x'), \quad \mathbf{J}(u, v) = (-v, u).$$

Para $(\mathbf{T}, \mathbf{N})$ jest dodatnio zorientowaną bazą ortonormalną. Różniczkując $\langle \gamma', \gamma' \rangle = 1$, dostajemy $\langle \gamma'', \gamma' \rangle = 0$. Zatem γ'' jest wielokrotnością $\mathbf{N}$.

Definicja 4.1. Krzywizna ze znakiem $\kappa(s)$ jest określona równaniem

$$\gamma'' = \mathbf{T}' = \kappa \mathbf{N}. \quad (4.1)$$

Krzywizna bez znaku wynosi $\|\gamma''\| = |\kappa|$.

Ponieważ $\det(\mathbf{T}, \mathbf{N}) = 1$, otrzymujemy

$$\kappa(s) = \det(\gamma'(s), \gamma''(s)). \quad (4.2)$$

Drugi wzór Freneta wynika z $\mathbf{N}' = \mathbf{J}\mathbf{T}' = \kappa\mathbf{J}\mathbf{N}$:

$$\mathbf{T}' = \kappa \mathbf{N}, \quad \mathbf{N}' = -\kappa \mathbf{T}.$$

Przy $\kappa > 0$ kierunek stycznej obraca się w lewo, a przy $\kappa < 0$ — w prawo. Lewa normalna $\mathbf{N}$ istnieje również w punktach $\kappa = 0$; nie należy jej utożsamiać z wektorem $\gamma''/\|\gamma''\|$, który jest tam nieokreślony.



Rysunek 6: Znak krzywizny przy ruchu w prawo. Normalna jest zawsze lewą normalną; przy ujemnej krzywiznie przyspieszenie jest do niej przeciwne.

4.2 Wzór w dowolnym parametrze

Twierdzenie 4.2. Dla regularnej krzywej $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ klasy C^2 krzywizna zgodna z rosnącym parametrem t wynosi

$$\kappa(t) = \frac{\det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t))}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}. \quad (4.3)$$

Dowód. Niech $v = \|\dot{\gamma}\| > 0$. W parametrze długości łuku $d/ds = v^{-1}d/dt$, więc

$$\gamma_s = \frac{\dot{\gamma}}{v}, \quad \gamma_{ss} = \frac{\ddot{\gamma}}{v^2} - \frac{\dot{v}\dot{\gamma}}{v^3}.$$

Drugi składnik jest równoległy do γ_s i znika w wyznaczniku. Zatem $\det(\gamma_s, \gamma_{ss}) = \det(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma})/v^3$. $\square$

Stwierdzenie 4.3 (Wpływ orientacji). Dla $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ zachodzi

$$\kappa_{\tilde{\gamma}}(u) = \operatorname{sgn}(\varphi'(u))\kappa_{\gamma}(\varphi(u)).$$

Dowód. W liczniku wzoru (4.3) pojawia się czynnik $(\varphi')^3$, a w mianowniku $|\varphi'|^3$. Składnik zawierający φ'' nie wnosi nic do wyznacznika. $\square$

Przesunięcia i obroty płaszczyzny zachowują κ . Odbicie płaszczyzny zmienia jej znak. Krzywizna bez znaku jest niezmiennicza względem wszystkich izometrii i regularnych zmian parametru.

4.3 Przykłady obliczeń

Przykład 4.4 (Wykres). Dla $\gamma(x) = (x, f(x))$, z orientacją zgodną ze wzrostem x ,

$$\kappa(x) = \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}. \quad (4.4)$$

W szczególności $f(x) = x^2/2$ daje $\kappa(x) = (1 + x^2)^{-3/2}$, a $f(x) = x^3$ daje $\kappa(x) = 6x/(1 + 9x^4)^{3/2}$. W drugim przykładzie krzywizna zmienia znak w zerze — jest to punkt przegięcia. Samo $\kappa = 0$ nie wystarcza do zmiany znaku, co pokazuje $f(x) = x^4$.

Przykład 4.5 (Okrąg). Dla $R > 0$ parametryzacja łukowa

$$\gamma(s) = (R \cos(s/R), R \sin(s/R))$$

ma $\mathbf{T} = (-\sin(s/R), \cos(s/R))$ oraz $\mathbf{N} = (-\cos(s/R), -\sin(s/R))$. Ponieważ $\gamma'' = \mathbf{N}/R$, krzywizna wynosi $1/R$. Obieg w przeciwnym kierunku daje $-1/R$.

Przykład 4.6 (Elipsa). Dla $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$ licznik wzoru na krzywiznę to ab , zatem

$$\kappa(t) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}} > 0.$$

Jeśli $a > b$, to

$$\kappa_{\max} = \frac{a}{b^2} \text{ w punktach } (\pm a, 0), \quad \kappa_{\min} = \frac{b}{a^2} \text{ w punktach } (0, \pm b).$$

Wierzchołki dłuższej osi są więc bardziej zakrzywione. Dla $a = b$ elipsa staje się okręgiem o stałej krzywiznie.

Przykład 4.7 (Asteroida poza ostrzami). **Uzupełnienie.** Dla parametryzacji (2.3)

$$\det(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}) = -9a^2 \sin^2 t \cos^2 t, \quad \kappa(t) = -\frac{1}{3a|\sin t \cos t|}, \quad t \notin (\pi/2)\mathbb{Z}.$$

Krzywizna bez znaku rośnie bez ograniczenia przy zbliżaniu się do ostrza. W samym ostrzu wzór dla krzywej regularnej nie ma zastosowania.

4.4 Kąt stycznej i odtwarzanie krzywej z krzywizny

Na przedziale parametrów można wybrać ciągły kąt stycznej $\theta(s)$, tak aby $\mathbf{T} = (\cos \theta, \sin \theta)$. Nie trzeba ograniczać go do jednego przedziału długości 2π . Różniczkowanie daje

$$\mathbf{T}' = \theta'(-\sin \theta, \cos \theta) = \theta' \mathbf{N}, \quad \boxed{\kappa = \theta'}.$$

Zatem całka z krzywizny jest zmianą *ciągłe wybranego* kąta stycznej:

$$\int_{s_0}^{s_1} \kappa(s) ds = \theta(s_1) - \theta(s_0).$$

Twierdzenie 4.8 (Podstawowe twierdzenie o krzywych płaskich). **Uzupełnienie.** Ciągła funkcja $k : I \rightarrow \mathbb{R}$, punkt $p_0 \in \mathbb{R}^2$, parametr $s_0 \in I$ i początkowy kąt θ_0 wyznaczają jednoznacznie krzywą klasy C^2 parametryzowaną długością łuku, z krzywizną k , punktem początkowym p_0 i styczną o kącie θ_0 .

Dowód. Definiujemy

$$\theta(s) = \theta_0 + \int_{s_0}^s k(u) du, \quad \gamma(s) = p_0 + \int_{s_0}^s (\cos \theta(u), \sin \theta(u)) du.$$

Wtedy $\|\gamma'\| = 1$ i $\gamma'' = k\mathbf{N}$. Odwrotnie, równania $\theta' = k$ i $\gamma' = (\cos \theta, \sin \theta)$ z podanymi wartościami początkowymi wymuszają właśnie te wzory. Bez ustalenia punktu i stycznej jednoznaczność zachodzi z dokładnością do przesunięcia i obrotu. $\square$

Wniosek 4.9 (Stała krzywizna). *Krzywa o $\kappa \equiv 0$ jest fragmentem prostej. Krzywa o stałej $\kappa = k \neq 0$ leży na okręgu o promieniu $1/|k|$.*

Dowód. W pierwszym przypadku $\gamma'' = 0$. W drugim $(\gamma + \mathbf{N}/k)' = \mathbf{T} - \mathbf{T} = 0$, więc $q = \gamma + \mathbf{N}/k$ jest stałym punktem i $\|\gamma - q\| = 1/|k|$. $\square$

5 Okrąg ściśle styczny

Okrąg ściśle styczny, zwany także *okręgiem oskulacyjnym*, odtwarza w punkcie krzywej jej położenie, styczną i krzywiznę. Poniżej precyzujemy ten opis przez zgodność pochodnych do rzędu drugiego.

Twierdzenie 5.1. *Niech γ będzie krzywą regularną klasy C^2 i niech $\kappa(s_0) \neq 0$. Istnieje dokładnie jeden okrąg, który po zgodnym wyborze orientacji i parametrów łukowych ma z γ to samo położenie oraz te same pierwszą i drugą pochodną w s_0 . Jego środek q i promień ρ wynoszą*

$$q = \gamma(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)} \mathbf{N}(s_0), \quad \rho = \frac{1}{|\kappa(s_0)|}. \quad (5.1)$$

Dowód. Przesuwamy i obracamy układ tak, by $\gamma(s_0) = (0, 0)$, $\mathbf{T}(s_0) = (1, 0)$ i $\mathbf{N}(s_0) = (0, 1)$. Każdy styczny okrąg ma środek $(0, r)$, gdzie $r \neq 0$ jest współrzędną ze znakiem, oraz promień $|r|$. Jego równanie to

$$F_r(x, y) = x^2 + y^2 - 2ry = 0.$$

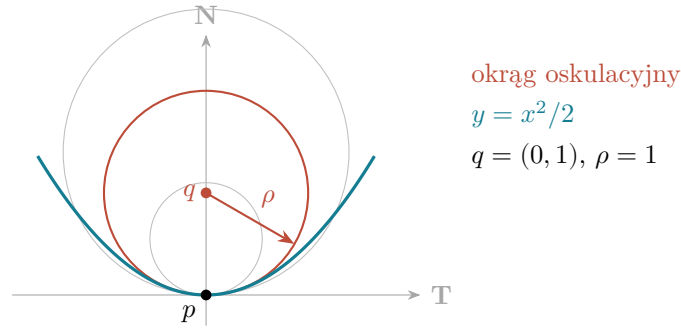
Dla $c_r(s) = F_r(\gamma(s))$ mamy

$$c_r(s_0) = c'_r(s_0) = 0, \quad c''_r(s_0) = 2 - 2r\kappa(s_0).$$

Warunek zgodności krzywizny wymusza $r = 1/\kappa(s_0)$. Istnienie zgodnej parametryzacji można sprawdzić jawnie. Dla $k = \kappa(s_0)$, $h = s - s_0$, $p = \gamma(s_0)$ przyjmujemy

$$\beta(h) = p + \frac{\sin(kh)}{k} \mathbf{T}(s_0) + \frac{1 - \cos(kh)}{k} \mathbf{N}(s_0).$$

Wtedy $\|\beta'\| = 1$, $\beta(0) = p$, $\beta'(0) = \mathbf{T}(s_0)$, $\beta''(0) = k\mathbf{N}(s_0)$, a jej ślad jest okręgiem z (5.1). $\square$



Rysunek 7: Wszystkie pokazane okręgi są styczne do paraboli w początku, ale tylko czerwony ma tam tę samą krzywiznę.

Uwaga 5.2 (Co się dzieje przy zerowej krzywiznie?). Jeżeli $\kappa(s_0) = 0$, żaden okrąg o skończonym promieniu nie ma kontaktu drugiego rzędu z krzywą. Rolę przybliżenia drugiego rzędu pełni wtedy prosta styczna:

$$\gamma(s_0 + h) = \gamma(s_0) + h\mathbf{T}(s_0) + o(h^2).$$

Nie należy w tym przypadku podstawiać $\kappa = 0$ do wzoru na środek.

Przykład 5.3 (Elipsa w końcach osi). Dla $a > b > 0$ w punkcie $(a, 0)$ mamy $\mathbf{N} = (-1, 0)$ i $\kappa = a/b^2$, więc

$$q = \left(a - \frac{b^2}{a}, 0\right), \quad \rho = \frac{b^2}{a}.$$

W punkcie $(0, b)$ otrzymujemy $\mathbf{N} = (0, -1)$, $\kappa = b/a^2$, a zatem

$$q = \left(0, b - \frac{a^2}{b}\right), \quad \rho = \frac{a^2}{b}.$$

Środek okręgu osculacyjnego nie musi leżeć wewnątrz elipsy.

6 Kontakt dwóch krzywych

Nie zakładamy z góry, że rozważana krzywa leży na zbiorze $F = 0$.

Niech $C = F^{-1}(0)$, $F \in C^2(D)$ i $\nabla F \neq 0$ na C . Niech γ będzie krzywą regularną klasy C^2 . Definiujemy *funkcję kontaktu*

$$c(s) = F(\gamma(s)).$$

Przestrzeń styczna do poziomu w $p \in C$ to

$$T_p C = \ker dF_p = \{v \in \mathbb{R}^2 : \langle \nabla F(p), v \rangle = 0\}. \quad (6.1)$$

Rzeczywiście, dla lokalnej parametryzacji α poziomu $F(\alpha(u)) \equiv 0$, więc $dF_p(\alpha'(u_0)) = 0$. Jądro niezerowej formy liniowej i przestrzeń styczna mają wymiar 1, stąd są równe.

Stwierdzenie 6.1 (Punkt wspólny i styczność).

$$c(s_0) = 0 \iff \gamma(s_0) \in C.$$

Ponadto

$$c(s_0) = c'(s_0) = 0 \iff \gamma(s_0) \in C \text{ i } \gamma'(s_0) \in T_{\gamma(s_0)} C.$$

Dowód. Pierwsza równoważność to definicja poziomicy. Druga wynika z

$$c'(s) = dF_{\gamma(s)}(\gamma'(s)) = \langle \nabla F(\gamma(s)), \gamma'(s) \rangle$$

oraz z (6.1). □

Twierdzenie 6.2 (Kontakt drugiego rzędu i krzywizna). *Niech γ będzie parametryzowana długością łuku i niech $c(s_0) = c'(s_0) = 0$. W punkcie $p = \gamma(s_0)$ orientujemy C tak, aby jego jednostkowa styczna zgadzała się z $\mathbf{T} = \gamma'(s_0)$. Wówczas*

$$c''(s_0) = 0 \iff \kappa_\gamma(s_0) = \kappa_C(p).$$

Dowód. Z reguły łańcuchowej drugiego rzędu

$$c''(s) = D^2F_{\gamma(s)}(\gamma'(s), \gamma'(s)) + \langle \nabla F(\gamma(s)), \gamma''(s) \rangle. \quad (6.2)$$

Niech α będzie lokalną parametryzacją łukową C zgodnie zorientowaną, z $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = \mathbf{T}$. Mamy $\gamma''(s_0) = \kappa_\gamma \mathbf{N}$ oraz $\alpha''(0) = \kappa_C \mathbf{N}$. Ponieważ $F \circ \alpha \equiv 0$, odjęcie odpowiednich równań daje

$$c''(s_0) = (\kappa_\gamma - \kappa_C) \langle \nabla F(p), \mathbf{N} \rangle.$$

Gradient jest niezerowy i prostopadły do $\mathbf{T}$, zatem $\langle \nabla F(p), \mathbf{N} \rangle = \pm \|\nabla F(p)\| \neq 0$. To kończy dowód. □

Orientacja jest częścią twierdzenia. Bez zgodnego wyboru stycznych nie wolno porównywać krzywizn ze znakiem. Na przykład ten sam okrąg przebiegany w przeciwnych kierunkach ma identyczny ślad, ale krzywizny $1/R$ i $-1/R$.

6.1 Co dokładnie oznacza „rzęd kontaktowy”?

W tym opracowaniu *kontakt co najmniej drugiego rzędu* oznacza $c(s_0) = c'(s_0) = c''(s_0) = 0$. Jeśli c jest klasy C^3 , wynika stąd $c(s_0 + h) = O(h^3)$; dla C^2 mamy $o(h^2)$. *Dokładnie* drugi rząd, w tej konwencji, wymaga dodatkowo $c'''(s_0) \neq 0$. Niektóre źródła nazywają rzędem kontaktu krotność zera funkcji c ; wtedy numer jest o jeden większy.

Stwierdzenie 6.3 (Niezależność od funkcji definiującej). *Uzupełnienie.* Warunki zerowania c, c', c'' nie zależą od wyboru regularnego równania tej samej krzywej.

Dowód. Jeśli F i G mają lokalnie ten sam zbiór zerowy oraz niezerowe gradienty, to lokalnie $G = hF$, gdzie h jest niezerową funkcją gładką (dla gładkich F, G). Aby to zobaczyć, wybieramy współrzędne (u, v) z $v = F$. Równanie $G(u, 0) = 0$ daje $G(u, v) = v \int_0^1 G_v(u, \tau v) d\tau$; czynnik przy v nie znika w punkcie, bo G jest regularne. Po złożeniu z γ otrzymujemy $G \circ \gamma = (h \circ \gamma)c$. Reguła Leibniza pokazuje, że przy zerowaniu niższych pochodnych kolejna pochodna mnoży się tylko przez niezerową wartość $h(p)$. Dla samych funkcji klasy C^2 to samo wynika z ich rozwinięć Taylora do drugiego rzędu. □

W szczególności nie można bez wyjaśnienia zastępować $F(x, y)$ funkcją $y - f(x)$ w rachunku funkcji kontaktu. Funkcje te nie muszą być równe; równoważne są warunki zerowania odpowiednich pochodnych.

6.2 Krzywizna poziomicy bez wyznaczania parametryzacji

Uzupełnienie. Dla $g = \|\nabla F\|$ wybierzmy orientację

$$\mathbf{T} = \frac{(-F_y, F_x)}{g}, \quad \mathbf{N} = -\frac{\nabla F}{g}.$$

Dwukrotne różniczkowanie $F \circ \alpha = 0$ w parametrze łukowym daje $0 = D^2F(\mathbf{T}, \mathbf{T}) - \kappa g$. Zatem

$$\kappa = \frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{(F_x^2 + F_y^2)^{3/2}}. \quad (6.3)$$

Wszystkie pochodne obliczamy w rozważanym punkcie poziomicy. Dla orientacji przeciwnej należy zmienić znak. Dla $F = x^2 + y^2 - R^2$ wybrana styczna odpowiada obiegowi przeciwnemu do ruchu wskazówek zegara i wzór daje $\kappa = 1/R$.

Przykład 6.4 (Dwa różne rzędy kontaktu). Niech $\gamma(t) = (t, t^2/2)$, a $F(x, y) = x^2 + y^2 - 2y$ opisuje okrąg osculacyjny w początku. Wówczas

$$c(t) = F(t, t^2/2) = \frac{t^4}{4}.$$

Znikają nawet pochodne do rzędu trzeciego. Zatem okrąg osculacyjny może mieć kontakt wyższy niż drugi rząd. Po zastąpieniu paraboli wykresem $y = t^2/2 + bt^3$, $b \neq 0$, otrzymujemy $c(t) = -2bt^3 + O(t^4)$ — kontakt jest dokładnie drugiego rzędu w przyjętej konwencji. Parametr t nie jest łukowy, ale rząd zera zachowuje się przy każdej regularnej zmianie parametru.

7 Krzywe zamknięte, pole i nierówność izoperymetryczna

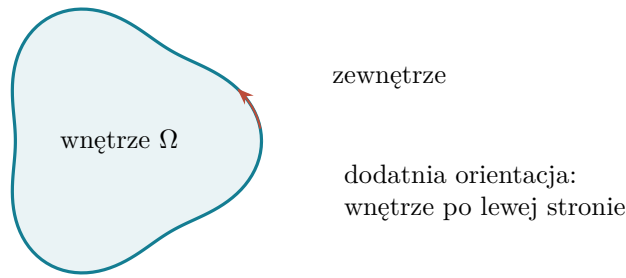
7.1 Krzywa prosta i twierdzenie Jordana

Definicja 7.1. Krzywą na przedziale nazywamy *prostą* (zwaną także „zwykłą”), jeśli jej parametryzacja jest różnowartościowa. *Krzywa zamknięta* jest opisana odwzorowaniem z okręgu S^1 ; równoważnie można użyć parametryzacji okresowej. *Prosta krzywa zamknięta* to ciągły, różnowartościowy obraz S^1 . W zapisie na $[0, T]$ dopuszczamy $\gamma(0) = \gamma(T)$, a poza tą identyfikacją nie ma powtórzeń.

Do uzyskania gładkiej parametryzacji okresowej nie wystarcza $\gamma(0) = \gamma(T)$: na końcach muszą zgadzać się również pochodne wymaganych rzędów. „Prosta krzywa” oznacza tu brak samoprzecięć, niekoniecznie linię prostą.

Twierdzenie 7.2 (Jordana). *Dopełnienie prostej krzywej zamkniętej w $\mathbb{R}^2$ składa się z dokładnie dwóch spójnych składowych otwartych: ograniczonego wnętrza i nieograniczonego zewnątrz. Krzywa jest brzegiem obu składowych.*

Jest to twierdzenie topologiczne, prawdziwe już dla krzywych ciągłych. Jego pełny dowód wykracza poza lokalną geometrię różniczkową i nie jest tu odtwarzany. W dalszych rachunkach zakładamy gładkość i regularność krzywej zamkniętej.



Rysunek 8: Prosta krzywa zamknięta oraz jej wnętrze i zewnątrz.

7.2 Pole z całki po brzegu

Stwierdzenie 7.3 (Wzór Greena na pole). *Uzupełnienie.* Jeśli gładka prosta krzywa zamknięta γ jest zorientowana dodatnio, czyli wnętrze leży po lewej stronie, to

$$A = \frac{1}{2} \int_0^T (x\dot{y} - y\dot{x}) dt = \int_0^T x\dot{y} dt. \quad (7.1)$$

Dowód. Twierdzenie Greena dla pola $(-y/2, x/2)$ daje pierwszą równość, bo $\partial_x(x/2) - \partial_y(-y/2) = 1$. Drugą otrzymujemy z całkowania przez części i okresowości: $\int y\dot{x} dt = -\int x\dot{y} dt$. $\square$

Orientacja przeciwna zmienia znak całki. Dla krzywych z samoprzecięciami całka wyznacza pole algebraiczne, a nie zawsze pole sumy ograniczonych obszarów.

Przykład 7.4 (Pole wnętrza asteroidy). Asteroida jest prostą krzywą zamkniętą, kawałkami regularną, więc można zastosować wzór Greena na jej regularnych łukach. Dla $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$:

$$x\dot{y} - y\dot{x} = 3a^2 \sin^2 t \cos^2 t, \quad A = \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{3\pi a^2}{8}.$$

Wraz z $L = 6a$ daje to przykład ścisłej nierówności $4\pi A < L^2$.

7.3 Nierówność izoperymetryczna z dowodem

Twierdzenie 7.5 (Nierówność izoperymetryczna). Jeśli gładka regularna prosta krzywa zamknięta ma długość L i ogranicza obszar o polu A , to

$$4\pi A \leq L^2. \quad (7.2)$$

Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy ślad krzywej jest okręgiem. Twierdzenie jest prawdziwe także dla prostych krzywych zamkniętych prostowalnych; poniższy dowód dotyczy przypadku gładkiego.

Lemat 7.6 (Nierówność Wirtingera). Dla gładkiej L -okresowej funkcji f o średniej zero zachodzi

$$\int_0^L f(s)^2 ds \leq \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \int_0^L f'(s)^2 ds.$$

Równość występuje dokładnie dla $f(s) = a \cos(2\pi s/L) + b \sin(2\pi s/L)$.

Dowód. Rozwijamy f w szereg Fouriera bez wyrazu stałego. W tożsamościach Parsevala całka z f^2 zawiera sumę $\frac{L}{2} \sum_{n \geq 1} (a_n^2 + b_n^2)$, a całka z $(f')^2$ sumę $\frac{L}{2} \sum_{n \geq 1} (2\pi n/L)^2 (a_n^2 + b_n^2)$. Ponieważ $n^2 \geq 1$, otrzymujemy tezę; równość wymusza znikanie wszystkich współczynników dla $n \geq 2$. $\square$

Dowód nierówności izoperymetrycznej. Wybieramy dodatnią parametryzację łukową $\gamma = (x, y)$ i przesuwamy początek tak, by x, y miały średnią zero. Ze wzoru na pole, nierówności Cauchy'ego-Schwarza i lematu:

$$\begin{aligned} 2A &= \int_0^L \langle J\gamma, \gamma' \rangle \, ds \\ &\leq \left(\int_0^L \|\gamma\|^2 \, ds \right)^{1/2} \left(\int_0^L \|\gamma'\|^2 \, ds \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{L}{2\pi} \int_0^L \|\gamma'\|^2 \, ds = \frac{L^2}{2\pi}. \end{aligned}$$

Jeśli zachodzi równość, lemat wymusza $\gamma(s) = u \cos(\omega s) + v \sin(\omega s)$, $\omega = 2\pi/L$. Warunek $\|\gamma'\| \equiv 1$ daje $\|u\| = \|v\| = 1/\omega$ i $\langle u, v \rangle = 0$, więc ślad jest okręgiem. Odwrotnie, dla okręgu $L = 2\pi R$ i $A = \pi R^2$, co daje równość. $\square$

Wynik mówi jednocześnie, że okrąg ogranicza największe pole przy zadanym obwodzie oraz ma najmniejszy obwód przy zadanym polu.

8 Zestaw wzorów i krótkie ćwiczenia

8.1 Najważniejsze wzory

Wielkość	Wzór i warunki
Prędkość	$v(t) = \ \dot{\gamma}(t)\ $
Długość	$L = \int_a^b v(t) \, dt$ dla krzywej klasy C^1
Parametr łukowy	$s(t) = \int_{t_0}^t v(u) \, du$, przy $v > 0$
Styczna i lewa normalna	$\mathbf{T} = \dot{\gamma}/v$, $\mathbf{N} = J\mathbf{T}$
Krzywizna ze znakiem	$\kappa = \det(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma})/v^3$, przy $v > 0$
Wzory Freneta	$d\mathbf{T}/ds = \kappa\mathbf{N}$, $d\mathbf{N}/ds = -\kappa\mathbf{T}$
Kąt stycznej	$\kappa = d\theta/ds$
Wykres $y = f(x)$	$\kappa = f''/(1 + (f')^2)^{3/2}$, orientacja w stronę rosnącego x
Środek i promień krzywizny	$q = \gamma + \mathbf{N}/\kappa$, $\rho = 1/ \kappa $, przy $\kappa \neq 0$
Pole wnętrza	$A = \frac{1}{2} \int (x\dot{y} - y\dot{x}) \, dt$, dodatni jednokrotny obieg prostej krzywej zamkniętej

8.2 Ćwiczenia z odpowiedziami

1. **Wymierny okrąg.** Dla (2.1) oblicz długość dla $t \in [-1, 1]$ i krzywiznę.

Odpowiedź: $L = \int_{-1}^1 2/(1+t^2) \, dt = \pi$, $\kappa = 1$. Jest to prawy półokrąg przebiegający od $(0, -1)$ do $(0, 1)$.

2. **Hiperbola.** Znajdź krzywiznę $\gamma_+(t) = (a \cosh t, b \sinh t)$ i okrąg oskulacyjny przy $t = 0$.
Odpowiedź:

$$\kappa(t) = -\frac{ab}{(a^2 \sinh^2 t + b^2 \cosh^2 t)^{3/2}}, \quad q = (a + b^2/a, 0), \quad \rho = b^2/a.$$

W punkcie $(a, 0)$ styczna wskazuje w górę, a krzywa skręca w prawo.

3. **Regularność nie zależy od równania w prosty sposób.** Porównaj $F = x^2 + y^2 - 1$ i $G = F^2$.

Odpowiedź: oba zbiory zerowe są okręgiem; $\nabla F = 2(x, y) \neq 0$ na okręgu, lecz $\nabla G = 2F \nabla F = 0$.
 Wzoru (6.3) nie wolno stosować do G na tym zbiorze.

4. **Ostrze czy samoprzecięcie?** Porównaj (t^2, t^3) i lemniskatę (2.2).

Odpowiedź: pierwsza parametryzacja ma zwykle ostrze w $t = 0$. Druga jest wszędzie regularna, ale ma dwa różne parametry opisujące początek układu; odpowiadające styczne są niezależne.

5. **Kontakt z prostą.** Dla $\gamma(t) = (t, t^3)$ i prostej $y = 0$ wyznacz funkcję kontaktu i krzywiznę w zerze.

Odpowiedź: $c(t) = t^3$, więc kontakt ma dokładnie drugi rząd w konwencji rozdziału 6; $\kappa(0) = 0$.
 Nie istnieje tam okrąg oskulacyjny o skończonym promieniu.