Wojciech Domitrz : Geometria różniczkowa, wykład 2

Niech M będzie gładką rozmaitością $\dim M = n$, $x \in M$, $\mathcal{A}$ - struktura różniczkowa na M.

Rozważmy zbiór krzywych $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ gładkich t, że $\gamma(0) = x$. W tym zbiorze wprowadzamy następującą relację: $\gamma_1 \sim \gamma_2$ jeśli $\forall\, (U, \varphi) \in \mathcal{A}$ $x \in U \Rightarrow \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\varphi \circ \gamma_1) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\varphi \circ \gamma_2)$

Relacja $\sim$ jest relacją równoważności. Zbiór ilorazowy tej relacji nazywamy **przestrzenią styczną w punkcie** x do M i oznaczamy $T_x M$. Elementy $T_x M$ nazywamy **wektorami stycznymi** do M w punkcie x

Niech $\gamma : (a; b) \to M$ krzywa gładka. Niech $t \in (a, b)$. Klasę równoważności krzywej $s \mapsto \gamma(t+s)$ względem relacji $\sim$ będziemy oznaczać $\dot{\gamma}(t) = [s \mapsto \gamma(s+t)]_\sim$, $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)} M$. $\dot{\gamma}(t)$ - nazywamy wektorem prędkości krzywej γ w t.

Tw. $\gamma_1 : (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \to M$, $\gamma_2 : (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \to M$ krzywe gładkie t, że $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$. Krzywe $\gamma_1 \sim \gamma_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\exists\, (U, \varphi) \in \mathcal{A}$ t, że $x \in U$ i $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\varphi \circ \gamma_1) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\varphi \circ \gamma_2)$

Dowód: $(\tilde{U}, \tilde{\varphi}) \in \mathcal{A}$ t, że $x \in \tilde{U}$ $\quad \tilde{\varphi} \circ \gamma_i = \tilde{\varphi} \circ (\varphi^{-1} \circ \varphi) \circ \gamma_i = (\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma_i)$

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\tilde{\varphi} \circ \gamma_i) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1})}{\partial x_j}\Big|_{\varphi(x)} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\varphi_j \circ \gamma_i) \quad \blacksquare$$

Struktura przestrzeni wektorowej na $T_x M$

(U,φ) mapa na M t, że $x \in U$. Niech $\dot\gamma(0) \in T_x M$. Wtedy określamy: $\tilde\varphi_x : T_x M \ni \dot\gamma(0) \longmapsto \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi(\gamma(t)) \in \mathbb{R}^m$

Stw. Przekształcenie $\tilde\varphi_x$ jest dobrze określoną bijekcją dla dowolnej mapy (U,φ).

Dowód: $\dot\gamma_1(0) = \dot\gamma_2(0) \iff \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi(\gamma_1(t)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi(\gamma_2(t))$. Stąd wynika, że $\tilde\varphi_x$ jest dobrze określoną injekcją. Niech $\xi \in \mathbb{R}^m$ oraz

$\gamma(t) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + t\xi)$. Wtedy $\tilde\varphi_x(\dot\gamma(0)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi(\varphi^{-1}(\varphi(x)+t\xi)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\varphi(t) + t\xi) = \xi$. Stąd $\tilde\varphi_x$ jest surjekcją ■

Strukturę przestrzeni wektorowej na $T_x M$ określamy następująco: $\tilde\varphi_x : T_x M \to \mathbb{R}^m$ jest izomorfizmem liniowym.

Tw. Jeżeli struktura liniowa $T_x M$ jest zdefiniowana w sposób podany powyżej to $\forall (V,\psi) \in \mathcal{A}$ takiej, że $x \in V$

odwzorowanie $\tilde\psi_x : T_x M \ni \dot\gamma(0) \longmapsto \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \psi(\gamma(t)) \in \mathbb{R}^m$ jest izomorfizmem liniowym.

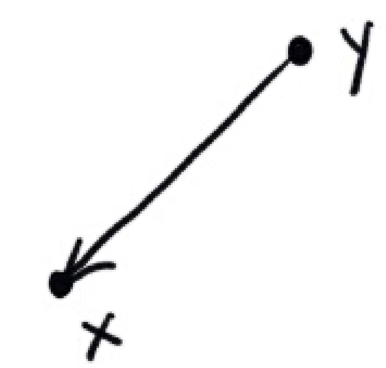
Dowód: $(\tilde\psi_x \circ \tilde\varphi_x^{-1})(\xi) = \tilde\psi_x([t \mapsto \varphi^{-1}(\varphi(x) + t\xi)]_\sim) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x) + t\xi) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial(\psi\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(x))\,\xi_i$

Odwzorowanie $\xi \mapsto \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial(\psi\circ\varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(x)) \cdot \xi_i$ jest izomorfizmem liniowym $\mathbb{R}^m$. Stąd $\tilde\psi_x = (\tilde\psi_x \circ \varphi_x^{-1}) \circ \varphi_x$

jest również izomorfizmem liniowym ■

Uwaga. $\dim T_x M = \dim M$

Przykład. Przestrzeń styczna do przestrzeni afinicznej.



$\mathbb{A}$ – przestrzeń afiniczna, punkty $x, y \in \mathbb{A}$, $x-y$ wektor w V

$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{A}$ krzywa gładka $\gamma(t) - \gamma(0) \in V$ $\quad \gamma'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t} \in V$ $\quad T_x\mathbb{A} \ni \dot\gamma(0) \mapsto \gamma'(0) \in V$

$T_x \mathbb{A} \simeq V$

Przykład. $M_1 \times M_2$ $\quad \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M_1 \times M_2$ krzywa gładka $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, gdzie $\gamma_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M_i$ dla $i=1,2$

$\dot\gamma(0) = (\dot\gamma_1(0), \dot\gamma_2(0))$ Otrzymujemy izomorfizm $T_{(x_1,x_2)}(M_1 \times M_2) \to T_{x_1} M_1 \oplus T_{x_2} M_2$

$f : M \to M$ przekształcenie gładkie, $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ krzywa gładka $\gamma(0) = x$. Wtedy $f \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to N$ krzywa gładka

Def. $d_x f : T_x M \ni [\gamma]_\sim \mapsto [f \circ \gamma]_\sim \in T_{f(x)} N$ nazywamy różniczką przekształcenia f w punkcie x lub przekształceniem stycznym. Stosuje się także oznaczenie f_{*x} zamiast $d_x f$

Stw. $d_x f$ jest przekształceniem liniowym.

Dowód.: $F = \tilde\varphi_{f(x)} \circ d_x f \circ \tilde\varphi_x^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ $\quad F(\xi) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial u_i}(\varphi(x))\, \xi_i$. F jest liniowe.

Stąd $d_x f = \tilde\varphi_{f(x)}^{-1} \circ (\tilde\varphi_{f(x)} \circ f \circ \tilde\varphi_x^{-1}) \circ \tilde\varphi_x$ też są liniowe. ∎

Stw. $f : M \to N$ gładkie, $g : N \to P$ gładkie. Wtedy $d_x(g \circ f) = d_{f(x)} g \circ d_x f$ oraz $d_x(id_M) = id_{T_x M}$

Dowód.: $d_x(g \circ f)([\gamma]_\sim) = [g \circ f \circ \gamma]_\sim = d_{f(x)} g([f \circ \gamma]_\sim) = d_{f(x)} g(d_x f\, [\gamma]_\sim)$, $\quad d_x(id_M)[\gamma]_\sim = [id_M \circ \gamma]_\sim = [\gamma]_\sim$ ∎

Niech $v = \dot\gamma(0) \in T_x M$, $f \in C^\infty(M)$.

Def. Pochodną ∂_v w kierunku wektora v funkcji f nazywamy $\partial_v f = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (f \circ \gamma)(t)$

Używa się także zapisu $\partial_v f = v f$.

Uwaga. $\partial_v f$ nie zależy od wyboru krzywej γ takiej, że $\dot\gamma(0) = v$, gdyż $\partial_v f = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i}(\varphi(x)) \overbrace{\frac{d(\varphi^i(\gamma(t)))}{dt}}^{\text{takie samo dla krzywych def. } v}\Big|_{t=0}$

Stw. $v, w \in T_x M$ $\quad f, g \in C^\infty(M)$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$

1) $\partial_v(af + bg) = a\partial_v f + b\partial_v g$, 2) $\partial_v(fg) = (\partial_v f) g(x) + f(x) \partial_v g$, 3) $\partial_{av + bw} f = a\partial_v f + b\partial_w f$

Tw. M - rozmaitość gładka, $x_0 \in M$. Jeżeli $\partial : C^\infty(M) \to M$ jest przekształceniem takim, że $\forall f, g \in C^\infty(M)$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$

1) $\partial(af+bg) = a\partial f + b\partial g$, 2) $\partial(fg) = (\partial f)g(x_0) + f(x_0)(\partial g)$ to $\exists!\, v \in T_{x_0}M$ taki, że $\partial = \partial_v$.