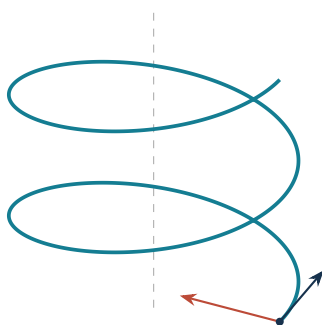


Krzywe w $\mathbb{R}^3$

Geometria różniczkowa

Wojciech Domitrz



Konwencje. Przestrzeń $\mathbb{R}^3$ ma standardową orientację. Krzywizna κ jest nieujemna. Tam, gdzie $\kappa > 0$, przyjmujemy $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$ i $\tau = -\langle \mathbf{B}', \mathbf{N} \rangle$. Prim oznacza pochodną względem długości łuku s , a kropka — względem dowolnego parametru t .

Spis treści

1	Krzywe regularne i długość łuku	2
2	Krzywizna i reper Freneta	4
3	Torsja i wzory Freneta–Serreta	5
4	Wzory dla dowolnego parametru	7
5	Krzywe płaskie i zerowa torsja	9
6	Izometrie i zmiana orientacji	10
7	Podstawowe twierdzenie teorii krzywych	11
8	Zestawienie wzorów i zadania	13

1 Krzywe regularne i długość łuku

Przez I rozumiemy przedział o niepustym wnętrzu. Domyślnie rozważamy odwzorowania gładkie, czyli klasy C^∞ ; przy podstawowych wynikach wskazujemy również wystarczającą klasę różniczkowalności. Dla przedziału domkniętego regularność na końcach rozumiemy przez przedłużenie do otoczenia. Iloczyn skalarny i normę euklidesową oznaczamy przez $\langle u, v \rangle$ i $\|u\|$.

1.1 Parametryzacja i zmiana parametru

Definicja 1.1. Krzywa parametryzowana w $\mathbb{R}^n$ to odwzorowanie $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Krzywa klasy C^1 jest regularna, jeżeli $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ dla każdego $t \in I$. Jej śladem jest zbiór $\gamma(I)$.

Definicja 1.2. Parametryzacje $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ i $\tilde{\gamma} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ są równoważne, jeżeli istnieje dyfeomorfizm $\varphi : J \rightarrow I$ taki, że $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$. Klasa tej relacji to krzywa nieparametryzowana. Jeśli dopuszczamy tylko $\varphi' > 0$, otrzymujemy krzywą zorientowaną.

Pochodna dyfeomorfizmu przedziałów nie znika i ma stały znak. Zmiana parametru z $\varphi' < 0$ odwraca kierunek przebiegu krzywej. Sam ślad nie określa parametryzacji ani liczby przebiegów: jednokrotne i dwukrotne obejście okręgu mają ten sam ślad, lecz różne długości.

1.2 Długość i jej niezmienniczość

Twierdzenie 1.3 (Wzór na długość). Dla krzywej $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ klasy C^1 długość, zdefiniowana jako supremum długości wpisanych łamanych, jest równa

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt. \quad (1.1)$$

Dowód. Dla dowolnego podziału $a = t_0 < \dots < t_m = b$ mamy

$$\sum_{i=1}^m \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \leq \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

Aby uzyskać nierówność przeciwną, wybierzmy podział tak drobny, by wahanie wektora $\dot{\gamma}$ na każdym jego odcinku było mniejsze niż ε . Dla $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ zachodzi wtedy

$$\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) - \dot{\gamma}(\xi_i)(t_i - t_{i-1})\| \leq \varepsilon(t_i - t_{i-1}).$$

Suma długości cięciw różni się od odpowiedniej sumy Riemanna o co najwyżej $\varepsilon(b - a)$. Przechodząc do granicy, otrzymujemy (1.1). $\square$

Jeżeli $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ jest dyfeomorfizmem, to

$$L(\gamma \circ \varphi) = \int_c^d \|\dot{\gamma}(\varphi(u))\| |\varphi'(u)| du = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

Dla $\varphi' < 0$ mamy $\varphi(c) = b$, $\varphi(d) = a$; moduł pochodnej kompensuje odwrócenie granic całkowania.

1.3 Parametr naturalny

Twierdzenie 1.4 (Parametryzacja długością łuku). *Każda regularna krzywa klasy C^1 dopuszcza parametryzację długością łuku, czyli parametryzację o prędkości jednostkowej.*

Dowód. Ustalmy $t_0 \in I$ i połóżmy

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}(u)\| \, du.$$

Ponieważ $\dot{s}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\| > 0$, odwzorowanie $s : I \rightarrow s(I)$ jest dyfeomorfizmem. Dla $\alpha(s) = \gamma(t(s))$ otrzymujemy

$$\alpha'(s) = \frac{\dot{\gamma}(t(s))}{\|\dot{\gamma}(t(s))\|}, \quad \|\alpha'(s)\| = 1.$$

Długość odcinka krzywej pomiędzy parametrami $s_1 < s_2$ wynosi $s_2 - s_1$. $\square$

Stwierdzenie 1.5 (Jednoznaczność). *Jeżeli dwie równoważne parametryzacje mają prędkość jednostkową, to zmiana parametru ma postać $s = \varepsilon u + c$, gdzie $\varepsilon \in \{1, -1\}$. Dla parametryzacji zgodnie zorientowanych pozostaje tylko przesunięcie $s = u + c$.*

Dowód. Z $\tilde{\alpha}(u) = \alpha(\varphi(u))$ wynika $1 = \|\tilde{\alpha}'(u)\| = |\varphi'(u)|$. Na przedziale ciągła funkcja φ' ma stały znak, zatem jest stale równa 1 albo -1 . Wystarczy scałkować. $\square$

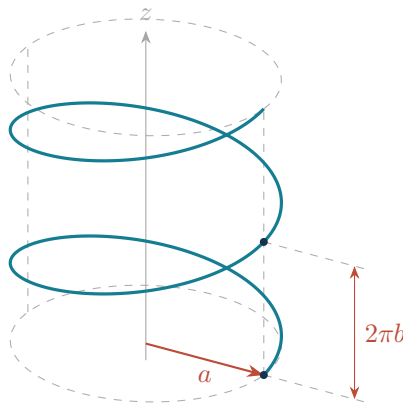
Przykład 1.6 (Linia śrubowa). Niech $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ i

$$\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Wtedy $\|\dot{\gamma}\| = c$, więc przy $s(0) = 0$ mamy $s = ct$ oraz

$$\alpha(s) = \left(a \cos \frac{s}{c}, a \sin \frac{s}{c}, \frac{bs}{c} \right). \quad (1.2)$$

Jest to wzór na położenie punktu, a nie na jego prędkość. Dla $b \neq 0$ krzywa leży na walcu $x^2 + y^2 = a^2$; jeden obrót zwiększa współrzędną z o $2\pi b$ i ma długość $2\pi c$. Dla $b = 0$ otrzymujemy okrąg.



Rysunek 1: Linia śrubowa o promieniu a i skoku $2\pi b$; na rysunku $b > 0$. Przerywane okręgi są przekrojami walca.

2 Krzywizna i reper Freneta

Od tej chwili krzywe leżą w $\mathbb{R}^3$. Najpierw zakładamy, że $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ jest klasy C^2 i $\|\gamma'(s)\| = 1$.

Definicja 2.1. Jednostkowy wektor styczny i krzywizna to

$$\mathbf{T}(s) = \gamma'(s), \quad \kappa(s) = \|\mathbf{T}'(s)\| = \|\gamma''(s)\|. \quad (2.1)$$

Jeżeli $\kappa(s) > 0$, definiujemy *normalną główną* i *binormalną*:

$$\mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{T}'(s)}{\kappa(s)}, \quad \mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s). \quad (2.2)$$

Uporządkowaną trójkę $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ nazywamy *reperem Freneta*.

Z różniczkowania $\langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle = 1$ otrzymujemy $\langle \mathbf{T}', \mathbf{T} \rangle = 0$. Stąd $\mathbf{T} \perp \mathbf{N}$, a z własności iloczynu wektorowego:

$$\|\mathbf{T}\| = \|\mathbf{N}\| = \|\mathbf{B}\| = 1, \quad \langle \mathbf{T}, \mathbf{N} \rangle = \langle \mathbf{T}, \mathbf{B} \rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{B} \rangle = 0.$$

Ponadto

$$\det(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}) = \langle \mathbf{T} \times \mathbf{N}, \mathbf{B} \rangle = 1.$$

Reper Freneta jest więc dodatnio zorientowaną bazą ortonormalną. Podstawowa zależność ma postać $\mathbf{T}' = \kappa \mathbf{N}$.

Regularność $\dot{\gamma} \neq 0$ wystarcza do zdefiniowania stycznej. Krzywizna może być równa zero. Do zdefiniowania normalnej głównej, binormalnej i torsji w klasycznym reperze Freneta potrzebujemy **dodatniej krzywizny**. Nie przypisujemy automatycznie torsji wartości zero w punktach, w których ten reper nie istnieje.

Stwierdzenie 2.2. Regularna krzywa klasy C^2 na przedziale ma krzywiznę identycznie równą zero wtedy i tylko wtedy, gdy jej ślad zawiera się w prostej.

Dowód. Przechodzimy do długości łuku. Jeśli $\kappa = 0$, to $\mathbf{T}' = 0$, więc $\gamma(s) = \gamma(s_0) + (s - s_0)\mathbf{T}(s_0)$. Odwrotnie, jednostkowa styczna regularnej krzywej leżącej w prostej jest na przedziale stała; zatem $\kappa = 0$. $\square$

Przykład 2.3 (Regularność nie oznacza dodatniej krzywizny). Krzywa $\gamma(t) = (t, t^3, 0)$ jest regularna, gdyż pierwsza współrzędna $\dot{\gamma}$ wynosi 1. Ze wzoru wyprowadzonego w rozdziale 4 dostajemy

$$\kappa(t) = \frac{6|t|}{(1 + 9t^4)^{3/2}}.$$

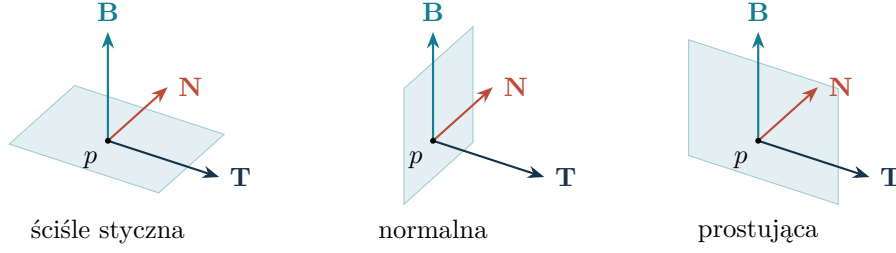
W punkcie $t = 0$ krzywizna znika. Dla $t \neq 0$ binormalna wynosi $\mathbf{B}(t) = (0, 0, \operatorname{sgn} t)$, więc nie ma nawet ciągłego przedłużenia przez zero.

2.1 Trzy płaszczyzny związane z reperem

Niech $p = \gamma(s_0)$ i niech $\mathbf{T}_0, \mathbf{N}_0, \mathbf{B}_0$ będą wektorami reperu w tym punkcie. Definiujemy płaszczyzny afiniczne:

Nazwa	Opis parametryczny	Równanie
Ścisłe styczna	$p + \operatorname{span}(\mathbf{T}_0, \mathbf{N}_0)$	$\langle X - p, \mathbf{B}_0 \rangle = 0$
Normalna	$p + \operatorname{span}(\mathbf{N}_0, \mathbf{B}_0)$	$\langle X - p, \mathbf{T}_0 \rangle = 0$
Prostująca	$p + \operatorname{span}(\mathbf{T}_0, \mathbf{B}_0)$	$\langle X - p, \mathbf{N}_0 \rangle = 0$

Płaszczyznę ściśle styczną nazywamy też *plaszczyną oskulacyjną*. Zawiera ona kierunek ruchu i kierunek zmiany stycznej.



Rysunek 2: Trzy płaszczyzny w lokalnym układzie reperu Freneta. Wektory $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ są wzajemnie prostopadłe w przestrzeni; rzut na kartkę nie zachowuje kątów.

3 Torsja i wzory Freneta–Serreta

Zakładamy teraz $\gamma \in C^3$, $\|\gamma'\| = 1$ i $\kappa > 0$ na całym I . Wektory $\mathbf{N}$ i $\mathbf{B}$ są wtedy klasy C^1 .

Definicja 3.1. *Torsja* krzywej to funkcja

$$\tau(s) = -\langle \mathbf{B}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle. \quad (3.1)$$

Twierdzenie 3.2 (Wzory Freneta–Serreta). *Reper Freneta spełnia układ*

$$\boxed{\mathbf{T}' = \kappa \mathbf{N}, \quad \mathbf{N}' = -\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}, \quad \mathbf{B}' = -\tau \mathbf{N}.} \quad (3.2)$$

Dowód. Pierwszy wzór wynika z definicji $\mathbf{N}$. Ponieważ $\|\mathbf{N}\| = 1$, mamy $\langle \mathbf{N}', \mathbf{N} \rangle = 0$. Z $\langle \mathbf{N}, \mathbf{T} \rangle = 0$ otrzymujemy

$$\langle \mathbf{N}', \mathbf{T} \rangle = -\langle \mathbf{N}, \mathbf{T}' \rangle = -\kappa.$$

Z kolei $\langle \mathbf{B}', \mathbf{B} \rangle = 0$ oraz

$$\langle \mathbf{B}', \mathbf{T} \rangle = -\langle \mathbf{B}, \mathbf{T}' \rangle = -\kappa \langle \mathbf{B}, \mathbf{N} \rangle = 0.$$

Zatem $\mathbf{B}'$ jest wielokrotnością $\mathbf{N}$, a definicja torsji daje $\mathbf{B}' = -\tau \mathbf{N}$. Na końcu

$$\langle \mathbf{N}', \mathbf{B} \rangle = -\langle \mathbf{N}, \mathbf{B}' \rangle = \tau,$$

co wyznacza wszystkie współrzędne $\mathbf{N}'$ w bazie $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$. □

3.1 Zapis macierzowy

Jeżeli wektory reperu zapisujemy jako **kolumny** macierzy $Q = [\mathbf{T} \ \mathbf{N} \ \mathbf{B}]$, to

$$Q' = QA, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}, \quad A^T = -A. \quad (3.3)$$

Dla macierzy $R = Q^T$, której **wierszami** są współrzędne $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$, ten sam układ ma postać

$$R' = CR, \quad C = -A = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Położenie macierzy współczynników i jej znaki zależą od tego, czy wektory zapisano w kolumnach, czy w wierszach.

3.2 Znaczenie geometryczne torsji

Binormalna jest jednostkowym wektorem normalnym do płaszczyzny ściśle stycznej. Równość $\|\mathbf{B}'\| = |\tau|$ mówi, że moduł torsji mierzy szybkość zmiany tego wektora względem długości łuku. Znak określa kierunek tej zmiany względem wybranej orientacji przestrzeni.

Stwierdzenie 3.3 (Rozwinięcie lokalne, wzór Bouqueta). *Niech $s_0 \in \text{int } I$, $p = \gamma(s_0)$, $\kappa_0 = \kappa(s_0)$ i $\tau_0 = \tau(s_0)$. Wtedy*

$$\begin{aligned} \gamma(s_0 + h) = p + h\mathbf{T}_0 + \frac{h^2}{2}\kappa_0\mathbf{N}_0 \\ + \frac{h^3}{6}(-\kappa_0^2\mathbf{T}_0 + \kappa_0'\mathbf{N}_0 + \kappa_0\tau_0\mathbf{B}_0) + o(h^3). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Dowód. Mamy $\gamma' = \mathbf{T}$, $\gamma'' = \kappa\mathbf{N}$ oraz, na mocy wzorów Freneta, $\gamma''' = -\kappa^2\mathbf{T} + \kappa'\mathbf{N} + \kappa\tau\mathbf{B}$. Podstawiamy te pochodne do wzoru Taylora z resztą Peana. $\square$

W szczególności odległość ze znakiem od płaszczyzny ściśle stycznej w punkcie p wynosi

$$\langle \gamma(s_0 + h) - p, \mathbf{B}_0 \rangle = \frac{\kappa_0\tau_0}{6}h^3 + o(h^3). \quad (3.6)$$

Krzywizna opisuje zgięcie widoczne w drugim rzędzie, a torsja wpływa na odchylenie od tej płaszczyzny w trzecim rzędzie. Samo $\tau(s_0) = 0$ nie oznacza, że krzywa jest płaska w otoczeniu s_0 .

3.3 Okrąg ściśle styczny

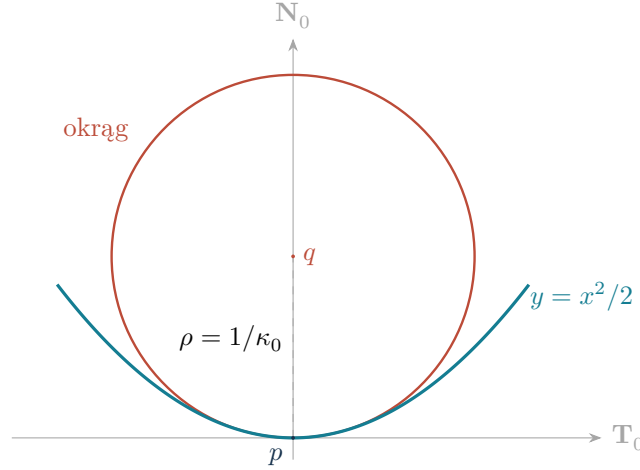
Definicja 3.4. W punkcie o $\kappa_0 > 0$ *okrąg ściśle styczny* leży w płaszczyźnie $p + \text{span}(\mathbf{T}_0, \mathbf{N}_0)$, ma promień i środek

$$\rho = \frac{1}{\kappa_0}, \quad q = p + \frac{1}{\kappa_0}\mathbf{N}_0. \quad (3.7)$$

Jego parametryzacja jednostkowa w pobliżu p to

$$c(h) = p + \frac{\sin(\kappa_0 h)}{\kappa_0}\mathbf{T}_0 + \frac{1 - \cos(\kappa_0 h)}{\kappa_0}\mathbf{N}_0.$$

Mamy $c(0) = p$, $c'(0) = \mathbf{T}_0$ i $c''(0) = \kappa_0\mathbf{N}_0$. Okrąg ten zgadza się z krzywą do drugiego rzędu i jest jednoznacznie wyznaczony przez te trzy warunki. Istotnie, dla okręgu jednostkowo parametryzowanego przyspieszenie jest skierowane do środka i ma długość równą odwrotności promienia.



Rysunek 3: Parabola $y = x^2/2$ i jej okrąg ściśle styczny w wierzchołku. Tutaj $\kappa_0 = 1$ i $q = (0, 1)$. W przypadku krzywej przestrzennej okrąg również leży w płaszczyźnie ściśle stycznej.

4 Wzory dla dowolnego parametru

Niech $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie regularną krzywą klasy C^3 . Oznaczmy $v(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|$. Wartości $\kappa(t)$ i $\tau(t)$ oznaczają niezmienniki geometryczne w punkcie o parametrze t , czyli złożenia $\kappa(s(t))$ i $\tau(s(t))$.

Twierdzenie 4.1. *Krzywizna regularnej krzywej jest dana wzorem*

$$\kappa = \frac{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|}{\|\dot{\gamma}\|^3}. \quad (4.1)$$

Gdy $\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma} \neq 0$, mamy również

$$\tau = \frac{\det(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\ddot{\gamma}})}{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|^2}, \quad (4.2)$$

oraz

$$\mathbf{T} = \frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|}, \quad \mathbf{B} = \frac{\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}}{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}. \quad (4.3)$$

Dowód. Wybieramy rosnący parametr długości łuku, zatem $\dot{s} = v > 0$. Reguła łańcuchowa i wzory Freneta dają

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= v\mathbf{T}, \\ \ddot{\gamma} &= \dot{v}\mathbf{T} + v^2\kappa\mathbf{N}, \\ \ddot{\ddot{\gamma}} &= (\ddot{v} - v^3\kappa^2)\mathbf{T} + (3v\dot{v}\kappa + v^3\kappa')\mathbf{N} + v^3\kappa\tau\mathbf{B}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

W ostatnim wierszu $\kappa' = d\kappa/ds$; w szczególności $\dot{\kappa} = v\kappa'$. Teraz

$$\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma} = v^3\kappa\mathbf{B}, \quad \|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|^2 = v^6\kappa^2.$$

Ponieważ $\det(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}) = 1$, otrzymujemy

$$\det(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\ddot{\gamma}}) = v^6\kappa^2\tau,$$

co dowodzi wzoru na torsję. Wzory na reper wynikają z tych samych równości i tożsamości $\mathbf{B} \times \mathbf{T} = \mathbf{N}$.

Wzór na krzywiznę pozostaje prawdziwy także dla $\kappa = 0$: bez dzielenia przez κ można zapisać $\ddot{\gamma} = \dot{v}\mathbf{T} + v^2\mathbf{T}'$ i wykorzystać $\mathbf{T}' \perp \mathbf{T}$. Do samego wzoru na krzywiznę wystarcza klasa C^2 . $\square$

Równoważna postać wzoru na normalną główną to

$$\mathbf{N} = \frac{(\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}) \times \dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\| \|\dot{\gamma}\|}.$$

Przypominamy też tożsamość $\det(u, v, w) = \langle u \times v, w \rangle$: pozwala ona liczyć torsję bez osobnego rozwijania wyznacznika.

4.1 Przykład: pełny rachunek dla linii śrubowej

Dla $\gamma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $a > 0$, mamy

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= (-a \sin t, a \cos t, b), \\ \ddot{\gamma} &= (-a \cos t, -a \sin t, 0), \\ \ddot{\gamma} &= (a \sin t, -a \cos t, 0), \\ \dot{\gamma} \times \ddot{\gamma} &= (ab \sin t, -ab \cos t, a^2).\end{aligned}$$

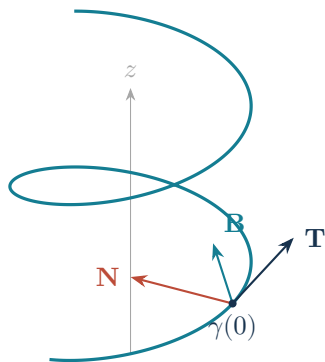
Stąd, przy $c = \sqrt{a^2 + b^2}$,

$$\kappa = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \tau = \frac{b}{a^2 + b^2}, \quad (4.5)$$

bo $\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\| = ac$ i $\det(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma}) = a^2b$. Reper wynosi

$$\mathbf{T} = \frac{1}{c}(-a \sin t, a \cos t, b), \quad \mathbf{N} = (-\cos t, -\sin t, 0), \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c}(b \sin t, -b \cos t, a). \quad (4.6)$$

Normalna główna wskazuje oś walca. Zmiana b na $-b$ zachowuje krzywiznę i zmienia znak torsji. Dla $b = 0$ otrzymujemy $\kappa = 1/a$ i $\tau = 0$.



Reper obraca się wzdłuż krzywej.

$\mathbf{N}$ jest skierowana ku osi.

$\mathbf{T} \perp \mathbf{N}$, $\mathbf{T} \perp \mathbf{B}$, $\mathbf{N} \perp \mathbf{B}$.

Rysunek 4: Reper Freneta linii śrubowej w punkcie o $t = 0$. Strzałki mają jednakową długość w przestrzeni; ich rzuty mogą mieć różne długości.

4.2 Przykład: krzywa sześcienna przestrzenna

Rozważmy $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$. Wówczas

$$\dot{\gamma} = (1, 2t, 3t^2), \quad \ddot{\gamma} = (0, 2, 6t), \quad \ddot{\gamma} = (0, 0, 6), \quad \dot{\gamma} \times \ddot{\gamma} = (6t^2, -6t, 2).$$

Iloczyn wektorowy nigdy nie znika, zatem reper istnieje dla każdego t . Obliczamy

$$\kappa(t) = \frac{2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^{3/2}}, \quad \tau(t) = \frac{3}{9t^4 + 9t^2 + 1}. \quad (4.7)$$

W punkcie $t = 0$ mamy $\mathbf{T} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{N} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{B} = (0, 0, 1)$, $\kappa = 2$ i $\tau = 3$. Płaszczyzna ściśle styczna ma równanie $z = 0$, a okrąg ściśle styczny ma środek $(0, 1/2, 0)$ i promień $1/2$. Ponieważ torsja jest dodatnia na całej krzywej, jej ślad nie leży w płaszczyźnie.

5 Krzywe płaskie i zerowa torsja

Definicja 5.1. Krzywą nazywamy *płaską*, jeśli jej ślad zawiera się w pewnej płaszczyźnie afinicznej w $\mathbb{R}^3$.

5.1 Krzywizna przestrzenna a krzywizna płaska ze znakiem

Niech $\gamma(s) = (x(s), y(s), 0)$ będzie parametryzowana długością łuku. Lokalnie możemy zapisać

$$\mathbf{T}(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s), 0), \quad \mathbf{T}'(s) = \theta'(s)(-\sin \theta(s), \cos \theta(s), 0).$$

W zorientowanej płaszczyźnie xy krzywizna ze znakiem wynosi $\kappa_{\text{pl}} = \theta'$, natomiast krzywizna przestrzenna to

$$\kappa = |\kappa_{\text{pl}}| = |\theta'|. \quad (5.1)$$

Jeśli $\theta' \neq 0$, normalna główna jest równa $\text{sgn}(\theta')(-\sin \theta, \cos \theta, 0)$. Nie zawsze jest to normalna skierowana w lewo względem ruchu.

Dla okręgu

$$\gamma(s) = \left(r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r}, 0 \right), \quad r > 0,$$

mamy

$$\mathbf{T} = \left(-\sin \frac{s}{r}, \cos \frac{s}{r}, 0 \right), \quad \gamma'' = -\frac{1}{r} \left(\cos \frac{s}{r}, \sin \frac{s}{r}, 0 \right).$$

Zatem $\kappa = 1/r$, $\mathbf{N}$ wskazuje środek okręgu, $\mathbf{B} = (0, 0, 1)$ oraz $\tau = 0$.

Twierdzenie 5.2 (Kryterium płaskości). *Niech $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie regularną krzywą klasy C^3 na przedziale i niech $\kappa > 0$ na całym I . Wtedy*

$$\gamma \text{ jest płaska} \iff \tau \equiv 0.$$

Dowód. Pracujemy w parametrze długości łuku. Jeśli ślad leży w płaszczyźnie $\langle X, u \rangle = d$, gdzie $\|u\| = 1$, to różniczkowanie daje $\langle \mathbf{T}, u \rangle = 0$ i $\kappa \langle \mathbf{N}, u \rangle = 0$. Ponieważ $\kappa > 0$, wektor u jest prostopadły do $\mathbf{T}$ i $\mathbf{N}$, zatem $\mathbf{B} = \pm u$. Ciągłość $\mathbf{B}$ i spójność przedziału wymuszają stałość tego znaku. Wobec tego $\mathbf{B}' = 0$, czyli $\tau = 0$.

Odwrotnie, jeśli $\tau \equiv 0$, to z $\mathbf{B}' = -\tau \mathbf{N}$ wynika $\mathbf{B}(s) = \mathbf{B}_0$, gdzie $\mathbf{B}_0$ jest stały. Dla ustalonego $s_0 \in I$ mamy

$$\frac{d}{ds} \langle \gamma(s) - \gamma(s_0), \mathbf{B}_0 \rangle = \langle \mathbf{T}(s), \mathbf{B}(s) \rangle = 0.$$

Wartość tego iloczynu przy $s = s_0$ wynosi zero, więc cały ślad leży w płaszczyźnie

$$\langle X - \gamma(s_0), \mathbf{B}_0 \rangle = 0.$$

□

Przykład 5.3 (Zerowa torsja w jednym punkcie). Dla $\gamma(t) = (t, t^2, t^4)$ iloczyn wektorowy pochodnych wynosi $(16t^3, -12t^2, 2)$, a więc nie znika. Ponadto

$$\tau(t) = \frac{12t}{64t^6 + 36t^4 + 1}, \quad \tau(0) = 0.$$

Mimo to krzywa nie jest płaska w żadnym otoczeniu zera. Gdyby $At + Bt^2 + Ct^4 = D$ na pewnym otwartym przedziale, to identyczność wielomianów wymuszałaby $A = B = C = D = 0$, co nie jest równaniem płaszczyzny.

Uwaga 5.4 (Dlaczego założenie dodatniej krzywizny jest istotne). Warunek „ $\tau = 0$ wszędzie tam, gdzie torsja jest określona” nie wystarcza do globalnej płaskości, jeśli dopuszczamy punkty $\kappa = 0$. Niech

$$f(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases} \quad \gamma(t) = (t, f(-t), f(t)), \quad -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}.$$

Jest to gładka, regularna krzywa. Dla $t < 0$ leży w płaszczyźnie $z = 0$, a dla $t > 0$ w płaszczyźnie $y = 0$. Ponieważ $f''(t) = e^{-1/t^2}(4 - 6t^2)/t^6 > 0$ dla $0 < t < 1/2$, na obu tych częściach $\kappa > 0$ i $\tau = 0$. W zerze $\kappa = 0$. Cała krzywa nie leży w jednej płaszczyźnie: każda z jej zakrzywionych połówek wyznacza inną płaszczyznę. Gładkość w zerze wynika z tego, że wszystkie pochodne f w zerze znikają.

6 Izometrie i zmiana orientacji

6.1 Postać izometrii przestrzeni euklidesowej

Twierdzenie 6.1. *Odwzorowanie $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zachowuje odległości wtedy i tylko wtedy, gdy ma postać*

$$F(x) = q + Lx, \quad L^T L = I_3. \quad (6.1)$$

Jest ono izometrią właściwą, czyli ruchem zachowującym orientację, gdy $\det L = 1$.

Dowód. Jeśli F zachowuje odległości, połóżmy $q = F(0)$ i $G(x) = F(x) - q$. Wtedy $G(0) = 0$, $\|G(x)\| = \|x\|$, a tożsamość polaryzacyjna daje

$$\langle G(x), G(y) \rangle = \frac{\|G(x)\|^2 + \|G(y)\|^2 - \|G(x) - G(y)\|^2}{2} = \langle x, y \rangle.$$

Dla standardowej bazy e_1, e_2, e_3 wektory $G(e_i)$ są więc bazą ortonormalną. Współrzędne $G(x)$ w tej bazie to $\langle G(x), G(e_i) \rangle = x_i$, zatem $G(x) = \sum_i x_i G(e_i) = Lx$, gdzie L ma kolumny $G(e_i)$ i jest ortogonalna. Odwrotnie, macierz ortogonalna zachowuje normę, a przesunięcie nie zmienia różnic punktów, więc (6.1) zachowuje odległości. $\square$

6.2 Wpływ izometrii na krzywiznę i torsję

Dla macierzy ortogonalnej L zachodzi

$$(Lu) \times (Lv) = (\det L)L(u \times v). \quad (6.2)$$

Wystarczy porównać iloczyny skalarne obu stron z dowolnym wektorem Lw . Są one równe, gdyż

$$\det(Lu, Lv, Lw) = (\det L) \det(u, v, w).$$

Stwierdzenie 6.2. *Jeśli $\tilde{\gamma} = q + L\gamma$ i L jest ortogonalna, to*

$$\tilde{\kappa} = \kappa, \quad \tilde{\tau} = (\det L)\tau.$$

Przy dodatniej krzywiznie reperry spełniają

$$\tilde{\mathbf{T}} = L\mathbf{T}, \quad \tilde{\mathbf{N}} = L\mathbf{N}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = (\det L)L\mathbf{B}.$$

Dowód. Izometria zachowuje długość łuku. Dla jednostkowej parametryzacji $\tilde{\mathbf{T}} = L\mathbf{T}$ i $\tilde{\mathbf{T}}' = L\mathbf{T}'$, skąd $\tilde{\kappa} = \kappa$ i $\tilde{\mathbf{N}} = L\mathbf{N}$. Wzór (6.2) wyznacza binormalną. Z definicji torsji dostajemy

$$\tilde{\tau} = -\langle (\det L)L\mathbf{B}', L\mathbf{N} \rangle = (\det L)\tau.$$

$\square$

Krzywizna jest niezmiennikiem wszystkich izometrii. Torsja zachowuje wartość przy izometriach właściwych i zmienia znak przy izometriach odwracających orientację przestrzeni, na przykład przy odbiciu w płaszczyźnie.

6.3 Odwrócenie parametru nie zmienia torsji

Stwierdzenie 6.3. Dla dyfeomorfizmu $\varphi : J \rightarrow I$ i $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ zachodzą

$$\tilde{\kappa}(u) = \kappa(\varphi(u)), \quad \tilde{\tau}(u) = \tau(\varphi(u)).$$

Obie równości obowiązują także dla $\varphi' < 0$.

Dowód. Niech $\varepsilon = \text{sgn } \varphi'$ i załóżmy $\kappa > 0$. Reguła łańcuchowa daje

$$\tilde{\mathbf{T}} = \varepsilon \mathbf{T} \circ \varphi, \quad \tilde{\mathbf{N}} = \mathbf{N} \circ \varphi, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \varepsilon \mathbf{B} \circ \varphi.$$

W szczególności, gdy obie parametryzacje są jednostkowe, $\varphi(u) = \varepsilon u + c$. Wówczas

$$\frac{d\tilde{\mathbf{B}}}{du} = \varepsilon^2 \mathbf{B}'(\varphi(u)) = -\tau(\varphi(u)) \tilde{\mathbf{N}}(u),$$

co dowodzi niezmienniczości torsji; analogicznie nie zmienia się krzywizna. Ogólny przypadek sprowadza się do parametryzacji jednostkowych. W punktach $\kappa = 0$ niezmienniczość krzywizny wynika bezpośrednio ze wzoru (4.1). $\square$

Operacja	Krywizna	Torsja
Odwrócenie przebiegu krzywej	bez zmiany	bez zmiany
Obrót i przesunięcie przestrzeni	bez zmiany	bez zmiany
Odbicie przestrzeni w płaszczyźnie	bez zmiany	zmiana znaku
Jednokładność o skali $\lambda > 0$	κ/λ	τ/λ

W pierwszym wierszu porównujemy wartości w odpowiadających sobie punktach. Ostatni wiersz wynika z potęg skali we wzorach (4.1)–(4.2).

7 Podstawowe twierdzenie teorii krzywych

Funkcje κ i τ jako funkcje długości łuku określają kształt krzywej o dodatniej krzywiznie. Położenie w przestrzeni ustala się przez wybór punktu i reperu początkowego.

Twierdzenie 7.1 (Istnienie i jednoznaczność z danymi początkowymi). *Niech I będzie przedziałem, $\kappa, \tau \in C^\infty(I)$ i $\kappa(s) > 0$ dla wszystkich $s \in I$. Ustalmy $s_0 \in I$, punkt $p_0 \in \mathbb{R}^3$ i dodatnio zorientowaną bazę ortonormalną (T_0, N_0, B_0) . Istnieje dokładnie jedna gładka krzywa $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ taka, że:*

- (i) $\|\gamma'(s)\| = 1$;
- (ii) jej krzywizną i torsją są odpowiednio $\kappa(s)$ i $\tau(s)$;
- (iii) $\gamma(s_0) = p_0$ oraz $(\mathbf{T}(s_0), \mathbf{N}(s_0), \mathbf{B}(s_0)) = (T_0, N_0, B_0)$.

Dowód. Krok 1: rozwiązanie układu dla reperu. Niech $A(s)$ będzie macierzą z (3.3). Rozważmy liniowy układ równań różniczkowych

$$Q' = QA, \quad Q(s_0) = Q_0 = [T_0 \ N_0 \ B_0]. \quad (7.1)$$

Liniowy układ z ciągłymi współczynnikami i zadaniem początkowym ma dokładnie jedno rozwiązanie na całym I . Uzasadnienie globalnego zakresu jest następujące: na każdym zwartym podprzedziale współczynniki są ograniczone, a oszacowanie Grönwalla wyklucza nieograniczony wzrost rozwiązania w skończonym czasie wewnątrz I . Gładkość współczynników daje gładkość rozwiązania.

Krok 2: ortonormalność i orientacja. Ponieważ $A^T = -A$,

$$(QQ^T)' = QAQ^T + QA^TQ^T = 0.$$

Z $Q_0Q_0^T = I_3$ wynika $QQ^T = I_3$, a więc również $Q^TQ = I_3$. Kolumny Q są ortonormalne. Ponadto $\det Q \in \{1, -1\}$; ciągłość i warunek $\det Q_0 = 1$ dają $\det Q = 1$ na całym przedziale. Oznaczając kolumny przez $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$, otrzymujemy zatem $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$.

Krok 3: odtworzenie krzywej. Definiujemy

$$\gamma(s) = p_0 + \int_{s_0}^s \mathbf{T}(u) du. \quad (7.2)$$

Wtedy $\gamma' = \mathbf{T}$, więc prędkość jest jednostkowa. Z układu (7.1) mamy $\mathbf{T}' = \kappa\mathbf{N}$. Ponieważ $\|\mathbf{N}\| = 1$ i $\kappa > 0$, krzywizna skonstruowanej krzywej jest równa zadanej κ , a jej normalną główną jest rzeczywiście $\mathbf{N}$. Równość $\mathbf{B}' = -\tau\mathbf{N}$ pokazuje, że torsja jest zadany τ . Warunki początkowe są spełnione.

Krok 4: jednoznaczność. Reper każdej krzywej spełniającej te warunki rozwiązuje ten sam układ (7.1) z tymi samymi danymi początkowymi. Jednoznaczność układu daje ten sam Q , a wzór (7.2) daje tę samą krzywą. $\square$

Twierdzenie 7.2 (Krzywizna i torsja wyznaczają krzywą z dokładnością do ruchu). *Niech $\gamma, \tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ będą krzywymi klasy C^3 parametryzowanymi długością łuku, o dodatnich krzywiznach. Następujące warunki są równoważne:*

- (i) $\kappa(s) = \tilde{\kappa}(s)$ i $\tau(s) = \tilde{\tau}(s)$ dla każdego $s \in I$;
- (ii) istnieje izometria właściwa $F(x) = q + Lx$ taka, że $\tilde{\gamma}(s) = F(\gamma(s))$ dla każdego $s \in I$.

Dowód. Implikacja (ii) $\Rightarrow$ (i) to stwierdzenie 6.2. Załóżmy (i) i ustalmy $s_0 \in I$. Niech $Q_0, \tilde{Q}_0$ będą macierzami początkowych reperów, z wektorami w kolumnach. Połóżmy

$$L = \tilde{Q}_0Q_0^T, \quad q = \tilde{\gamma}(s_0) - L\gamma(s_0).$$

Mamy $L \in \text{SO}(3)$, gdzie $\text{SO}(3) = \{L : L^T L = I_3, \det L = 1\}$. Krzywe $q + L\gamma$ i $\tilde{\gamma}$ mają te same niezmienniki, punkt początkowy i reper początkowy. Ich repy rozwiązują identyczny liniowy układ Freneta. Jednoznaczność tego układu, a następnie całkowanie stycznej dają $q + L\gamma = \tilde{\gamma}$. Ten argument wymaga tylko ciągłości współczynników układu, która wynika z założonej klasy C^3 i dodatniej krzywizny. $\square$

Uwaga 7.3. Porównujemy niezmienniki jako funkcje tego samego parametru długości łuku. Jeśli początek lub orientacja parametrów są inne, najpierw trzeba dokonać odpowiedniej zmiany $s = \pm u + c$. Równość samych zbiorów wartości krzywizny i torsji nie wystarcza.

Wniosek 7.4 (Stała krzywizna i stała torsja). *Krzywa jednostkowa o $\kappa \equiv k > 0$ i $\tau \equiv t_0$ jest, z dokładnością do izometrii właściwej, krzywą*

$$\alpha(s) = \left(\frac{k}{k^2 + t_0^2} \cos(\omega s), \frac{k}{k^2 + t_0^2} \sin(\omega s), \frac{t_0}{\omega} s \right), \quad \omega = \sqrt{k^2 + t_0^2}. \quad (7.3)$$

Dla $t_0 = 0$ jest to okrąg o promieniu $1/k$; dla $t_0 \neq 0$ — linia śrubowa.

Dowód. We wzorach dla linii śrubowej wybieramy $a = k/(k^2 + t_0^2)$ i $b = t_0/(k^2 + t_0^2)$. Wtedy $a^2 + b^2 = 1/\omega^2$, a wzór (1.2) przyjmuje postać (7.3). Bezpośrednie obliczenie daje $\kappa = k$ i $\tau = t_0$. Teza wynika z twierdzenia 7.2. $\square$

8 Zestawienie wzorów i zadania

8.1 Najważniejsze wzory

Parametr długości łuku: $\|\gamma'\| = 1, \kappa > 0$.

$$\mathbf{T} = \gamma', \quad \kappa = \|\gamma''\|, \quad \mathbf{N} = \frac{\gamma''}{\kappa}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}, \quad \tau = -\langle \mathbf{B}', \mathbf{N} \rangle.$$

$$\mathbf{T}' = \kappa \mathbf{N}, \quad \mathbf{N}' = -\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}, \quad \mathbf{B}' = -\tau \mathbf{N}.$$

Dowolny parametr: $v = \|\dot{\gamma}\| > 0$.

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{v} \frac{d}{dt}, \quad \kappa = \frac{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|}{v^3}, \quad \tau = \frac{\det(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\ddot{\gamma}})}{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|^2}.$$

Wzór na torsję wymaga $\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma} \neq 0$.

Przy obliczeniach warto zachować kolejność: sprawdzić regularność, obliczyć $\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}$, ustalić, gdzie jest niezerowy, a dopiero potem wyznaczać reper i torsję. Do obliczenia κ i τ nie trzeba jawnie odwracać funkcji długości łuku.

8.2 Zadania

1. Dla $\gamma(t) = (2 \cos 3t, 2 \sin 3t, 3t)$ oblicz prędkość, krzywiznę, torsję i długość jednego zwoju.
2. Rozważ $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, -t)$. Porównaj krzywiznę i torsję krzywych $\gamma(t)$, $\gamma(-t)$ oraz $(\cos t, \sin t, t)$.
3. Dla $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ wyznacz w zerze wszystkie trzy płaszczyzny reperi Freneta i równania okręgu ściśle stycznego.
4. Zrekonstruuuj, z dokładnością do ruchu, krzywą o stałych niezmiennikach $\kappa = 2$, $\tau = 1$. Podaj jej promień i skok.
5. Wykaż, że $\gamma(t) = (t, \cosh t, 0)$ ma dodatnią krzywiznę i zerową torsję. Oblicz $\kappa(t)$ oraz jej maksimum.
6. Niech $\gamma(s)$ będzie krzywą klasy C^3 parametryzowaną długością łuku i niech $\kappa > 0$. Udowodnij, że iloraz τ/κ jest stały wtedy i tylko wtedy, gdy styczna $\mathbf{T}$ tworzy stały kąt z pewnym stałym jednostkowym wektorem u .

8.3 Odpowiedzi i wskazówki

1. $v = 3\sqrt{5}$, $\kappa = 2/5$, $\tau = 1/5$. Jednemu zwojowi odpowiada przedział parametru długości $2\pi/3$, więc jego długość to $2\pi\sqrt{5}$.
2. We wszystkich trzech przypadkach $\kappa = 1/2$. Dla pierwszych dwóch krzywych $\tau = -1/2$, dla trzeciej $\tau = 1/2$. Trzecia krzywa jest odbiciem pierwszej w płaszczyźnie $z = 0$.
3. Odpowiednio: $z = 0$, $x = 0$ i $y = 0$. Okrąg spełnia $z = 0$ i $x^2 + (y - 1/2)^2 = 1/4$.
4. Można wybrać

$$\gamma(s) = \left(\frac{2}{5} \cos(\sqrt{5}s), \frac{2}{5} \sin(\sqrt{5}s), \frac{s}{\sqrt{5}} \right).$$

Promień wynosi $2/5$, a skok $2\pi/5$.

5. $\dot{\gamma} = (1, \sinh t, 0)$ i $\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma} = (0, 0, \cosh t)$. Stąd $\kappa = 1/\cosh^2 t > 0$ oraz $\tau = 0$. Maksimum krzywizny wynosi 1 i występuje przy $t = 0$.
6. Jeśli $\tau/\kappa = c$, to

$$u = \frac{c\mathbf{T} + \mathbf{B}}{\sqrt{1 + c^2}}$$

jest stały, bo $u' = (c\kappa - \tau)\mathbf{N}/\sqrt{1 + c^2} = 0$, i $\langle \mathbf{T}, u \rangle = c/\sqrt{1 + c^2}$. Odwrotnie, z $\langle \mathbf{T}, u \rangle = a = \text{const}$ wynika $\langle \mathbf{N}, u \rangle = 0$, zatem $u = a\mathbf{T} + b\mathbf{B}$. Współczynnik b też jest stały, gdyż $b' = \langle \mathbf{B}', u \rangle = -\tau \langle \mathbf{N}, u \rangle = 0$. Nie może być $b = 0$: wtedy $u = \pm\mathbf{T}$ i $\kappa = 0$. Różniczkując $u = a\mathbf{T} + b\mathbf{B}$, dostajemy $a\kappa - b\tau = 0$, czyli $\tau/\kappa = a/b$. To kryterium opisuje *uogólnione linie śrubowe*; nie wymaga stałości samej krzywizny ani samej torsji.