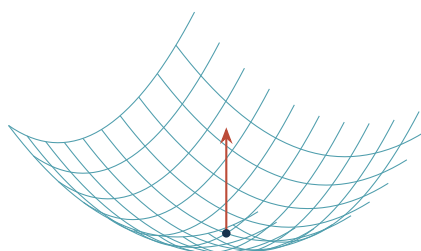


Powierzchnie w $\mathbb{R}^3$

Geometria różniczkowa

Wojciech Domitrz



Oznaczenia. Parametryzację zapisujemy jako $p(u, v)$, a jej pochodne jako p_u, p_v . Pierwsza forma podstawowa ma postać $I = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$. Funkcję definiującą powierzchnię uwikłaną oznaczamy przez Φ , aby odróżnić ją od współczynnika F .

Spis treści

1	Wykresy i powierzchnie uwikłane	2
2	Parametryzacje i regularność powierzchni	3
3	Przestrzeń styczna i wektor normalny	5
4	Różniczki i pierwsza forma podstawowa	7
5	Pole powierzchni	9
6	Długości, kąty i współrzędne izotermiczne	11
7	Lokalne izometrie i rozwijanie powierzchni	13
8	Zestawienie i zadania	14

1 Wykresy i powierzchnie uwikłane

Pracujemy w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym $\langle X, Y \rangle$ i normą $\|X\|$. Domyślnie wszystkie odwzorowania są gładkie, czyli klasy C^∞ . Podstawowe definicje regularności, płaszczyzny stycznej, pola i pierwszej formy podstawowej wymagają jedynie klasy C^1 .

1.1 Wykres funkcji dwóch zmiennych

Niech $D \subset \mathbb{R}^2$ będzie otwarty i niepusty, a $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ gładka. Jej wykres

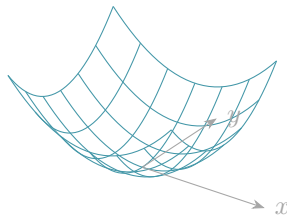
$$\text{graph } f = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}$$

jest podstawowym przykładem powierzchni. Opisuje go parametryzacja $p(u, v) = (u, v, f(u, v))$.

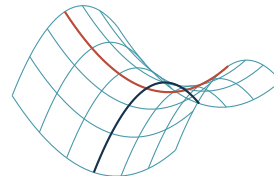
Przykład 1.1. Wykres funkcji $f(x, y) = \alpha x + \beta y + \delta$ jest płaszczyzną. Dla stałych $a, b > 0$ wykresy

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

to odpowiednio paraboloida eliptyczna i paraboloida hiperboliczna. Druga ma kształt siodła: przekroje płaszczyznami $y = 0$ i $x = 0$ są parabolami wygiętymi w przeciwne strony.



paraboloida eliptyczna



paraboloida hiperboliczna

Rysunek 1: Siatki parametryczne dwóch wykresów. Na siodle wyróżniono dwa prostopadłe przekroje przez wierzchołek.

1.2 Równanie uwikłane

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ będzie otwarty. Dla funkcji $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ rozważamy poziomice

$$S = \Phi^{-1}(0) = \{q \in \Omega : \Phi(q) = 0\}.$$

Twierdzenie 1.2 (Twierdzenie o regularnej poziomicy). *Jeżeli $\Phi(q_0) = 0$ i $\text{grad } \Phi(q_0) \neq 0$, to w otoczeniu q_0 zbiór S jest wykresem gładkiej funkcji dwóch zmiennych, po ewentualnej zamianie ról osi współrzędnych. Jeżeli gradient nie znika w żadnym punkcie niepustej poziomicy, to jest ona powierzchnią regularną.*

Dowód. Co najmniej jedna pochodna cząstkowa jest niezerowa. Załóżmy, że $\Phi_z(q_0) \neq 0$. Twierdzenie o funkcji uwikłanej daje otoczenia, w których równanie $\Phi(x, y, z) = 0$ jest równoważne $z = f(x, y)$ dla pewnej gładkiej funkcji f . Ponadto

$$f_x = -\frac{\Phi_x}{\Phi_z}, \quad f_y = -\frac{\Phi_y}{\Phi_z},$$

gdzie pochodne Φ obliczamy w punkcie $(x, y, f(x, y))$. Przypadki $\Phi_x \neq 0$ lub $\Phi_y \neq 0$ są analogiczne. $\square$

Przykład 1.3 (Kwadryki). Dla $a, b, c > 0$ otrzymujemy następujące powierzchnie:

Równanie	Powierzchnia
$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0, (\alpha, \beta, \gamma) \neq 0$	Płaszczyzna
$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$	Elipsoida
$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$	Hiperboloida jednopowłokowa
$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = -1$	Hiperboloida dwupowłokowa

W każdym przypadku gradient funkcji definiującej nie znika na poziomicy. Dla elipsoidy i hiperboloid mógłby zniknąć jedynie w zerze, które nie należy do tych zbiorów. Jeśli $a = b = c = R$, elipsoida jest sferą S_R^2 o promieniu R ; sfera jednostkowa to $S^2 = S_1^2$.

Warunek $\text{grad } \Phi(q) = 0$ oznacza, że q jest punktem krytycznym *danego równania*. Sam w sobie nie dowodzi osobliwości zbioru $\Phi^{-1}(0)$. Na przykład $\Phi(x, y, z) = z^2$ ma zerowy gradient w każdym punkcie poziomu $z = 0$, a poziomica ta jest gładką płaszczyzną. To samo miejsce opisuje regularne równanie $z = 0$.

2 Parametryzacje i regularność powierzchni

Definicja 2.1. Gładkie odwzorowanie $p : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, gdzie $D \subset \mathbb{R}^2$ jest otwarty, jest *regularne* w (u_0, v_0) , jeżeli wektory

$$p_u = (x_u, y_u, z_u), \quad p_v = (x_v, y_v, z_v)$$

są w tym punkcie liniowo niezależne. Równoważnie,

$$\text{rank } Dp = 2 \iff p_u \times p_v \neq 0. \quad (2.1)$$

Odwzorowanie regularne w każdym punkcie dziedziny nazywamy immersją.

Definicja 2.2 (Płat i powierzchnia regularna). *Płat powierzchni* jest obrazem regularnej parametryzacji $p : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, która jest homeomorfizmem na swój obraz. Zbiór $S \subset \mathbb{R}^3$ jest *powierzchnią regularną*, jeśli każdy jego punkt ma otoczenie w S będące takim płatem. Parametry u, v są wtedy lokalnymi współrzędnymi, a odwzorowanie p^{-1} przypisuje punktom płata ich współrzędne.

Warunek homeomorfizmu obejmuje różnowartościowość i ciągłość odwrotności w topologii odziedziczonej z $\mathbb{R}^3$. Nie wymagamy, by całą powierzchnię dało się opisać jednym płatem.

Twierdzenie 2.3 (Regularna parametryzacja jest lokalnie wykresem). *Jeżeli $p_u(u_0, v_0)$ i $p_v(u_0, v_0)$ są liniowo niezależne, to po ograniczeniu p do dostatecznie małego otoczenia punktu (u_0, v_0) otrzymujemy płat będący wykresem gładkiej funkcji względem pewnej pary współrzędnych przestrzeni.*

Dowód. Macierz Dp ma rząd 2, więc jeden z jej minorów stopnia 2 nie znika. Po zamianie współrzędnych możemy założyć

$$\det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} (u_0, v_0) \neq 0.$$

Twierdzenie o funkcji odwrotnej zastosowane do $h(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ daje otoczenie U , na którym h jest dyfeomorfizmem na otwarty zbiór V . Zapiszmy $h^{-1}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$. Wtedy

$$p \circ h^{-1}(x, y) = (x, y, f(x, y)), \quad f(x, y) = z(u(x, y), v(x, y)).$$

Jest to wykres funkcji gładkiej. Odwrotność $p|_U$ otrzymujemy, rzutując na współrzędne (x, y) i stosując h^{-1} ; jest ona ciągła. $\square$

Uwaga 2.4. Warunek rzędu zapewnia opis *lokalny*. Nie wyklucza samoprzecięć całego obrazu immersji. Na przykład

$$p(u, v) = (\sin u, \sin 2u, v)$$

ma rząd 2 wszędzie, ponieważ $\cos u$ i $\cos 2u$ nie znikają jednocześnie. Jednak obrazy punktów $(0, v)$ i (π, v) pokrywają się, a odpowiadające im płaty przecinają się wzdłuż osi pionowej. Cały obraz nie jest powierzchnią regularną w sensie powyższej definicji.

2.1 Przykłady i dziedziny parametrów

1. Wykres. Dla $p(u, v) = (u, v, f(u, v))$ mamy

$$p_u = (1, 0, f_u), \quad p_v = (0, 1, f_v), \quad p_u \times p_v = (-f_u, -f_v, 1).$$

Parametryzacja jest regularna i różnowartościowa, a odwrotność jest rzutem $(x, y, z) \mapsto (x, y)$.

2. Elipsoida. Parametryzacja

$$p(u, v) = (a \cos u \cos v, b \cos u \sin v, c \sin u) \quad (2.2)$$

jest regularna dla $-\pi/2 < u < \pi/2$. Aby otrzymać płat, wybieramy otwarty przedział $v_0 < v < v_0 + 2\pi$. Pomijamy w ten sposób jeden południk i oba bieguny. W otoczeniu biegunów stosujemy wykresy

$$z = \pm c \sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2}, \quad x^2/a^2 + y^2/b^2 < 1.$$

Zanik p_v dla $u = \pm\pi/2$ jest wadą współrzędnych, a nie osobliwością elipsoidy.

3. Hiperboloida jednowłokowa. Wzór

$$p(u, v) = (a \cosh u \cos v, b \cosh u \sin v, c \sinh u)$$

daje regularną immersję dla $u, v \in \mathbb{R}$. Do uzyskania płata wystarczy ograniczyć v do otwartego przedziału długości 2π . Regularność widać także z tego, że p_u ma niezerową składową pionową $c \cosh u$, a niezerowy p_v ma składową pionową równą zeru.

4. Hiperboloida dwuwłokowa. Górną powłokę poza wierzchołkiem opisuje

$$p(u, v) = (a \sinh u \cos v, b \sinh u \sin v, c \cosh u), \quad u > 0.$$

Znowu wybieramy otwarty przedział kątowny dla v . Przy $u = 0$ zanika p_v , ale punkt $(0, 0, c)$ jest regularny. Cała górna powłoka ma prostszy opis jako wykres

$$z = c \sqrt{1 + x^2/a^2 + y^2/b^2}.$$

Dolną powłokę otrzymujemy przez zmianę znaku z .

Dziedzina pojedynczego układu współrzędnych jest otwarta. Zakres $0 \leq v < 2\pi$ jest wygodny do opisanie okresowości, lecz nie jest otwartą dziedziną płata. Przy całkowaniu można używać domkniętych zakresów i pomijać szwy o zerowym polu, o ile wewnątrz nie pokrywa powierzchni wielokrotnie.

2.2 Przykład rzeczywistej osobliwości

Niech $a > 0$ i

$$\Phi(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - a^2(z^2 - x^2 - y^2). \quad (2.3)$$

Poziomica zerowa powstaje przez obrót lemniskaty wokół osi z . Opisuje ją wzór

$$p(u, v) = \left(\frac{a \sin u \cos u \cos v}{1 + \sin^2 u}, \frac{a \sin u \cos u \sin v}{1 + \sin^2 u}, \frac{a \cos u}{1 + \sin^2 u} \right), \quad 0 \leq u \leq \pi. \quad (2.4)$$

Bezpośrednie podstawienie daje $\Phi(p(u, v)) = 0$. Przy $u = \pi/2$ cały równoleżnik zapada się do początku układu. Sam zanik gradientu $\text{grad } \Phi(0) = 0$ nie byłby jeszcze dowodem osobliwości, ale tutaj możemy wykazać, że nie istnieje jedna płaszczyzna styczna.

Dla ustalonego v krzywa $u \mapsto p(u, v)$ przechodzi przez zero i ma w nim pochodną

$$p_u(\pi/2, v) = -\frac{a}{2}(\cos v, \sin v, 1).$$

Dla $v = 0, \pi, \pi/2$ otrzymujemy trzy liniowo niezależne wektory. Gdyby poziomica była w zerze powierzchnią regularną, wszystkie te prędkości musiałyby leżeć w dwuwymiarowej przestrzeni stycznej, co jest niemożliwe. Początek układu jest więc rzeczywistą osobliwością. Natomiast punkty $(0, 0, \pm a)$ są regularne, bo gradient Φ jest tam niezerowy; degeneracja wzoru (2.4) przy $u = 0, \pi$ dotyczy tylko współrzędnych.

3 Przestrzeń styczna i wektor normalny

Niech $q = p(u_0, v_0)$ będzie punktem płata powierzchni S .

Definicja 3.1. *Przestrzeń styczna w punkcie q to*

$$T_q S = \text{span}\{p_u(u_0, v_0), p_v(u_0, v_0)\} \subset \mathbb{R}^3. \quad (3.1)$$

Afiniczna płaszczyzna styczna przechodzi przez q i jest zbiorem $q + T_q S = \{q + \xi p_u + \eta p_v : \xi, \eta \in \mathbb{R}\}$.

Wektory p_u, p_v są prędkościami krzywych współrzędnych $u \mapsto p(u, v_0)$ i $v \mapsto p(u_0, v)$.

Stwierdzenie 3.2. *Przestrzeń $T_q S$ jest dokładnie zbiorem prędkości $\gamma'(0)$ krzywych gładkich na S spełniających $\gamma(0) = q$. W szczególności nie zależy od wyboru lokalnej parametryzacji.*

Dowód. W małym otoczeniu zera krzywą zapisujemy jako $\gamma(t) = p(u(t), v(t))$. Reguła łańcuchowa daje

$$\gamma'(0) = \dot{u}(0)p_u(u_0, v_0) + \dot{v}(0)p_v(u_0, v_0) \in T_q S.$$

Gładkość współrzędnych krzywej wynika z lokalnego opisu wykresowego z twierdzenia 2.3. Odwrotnie, wektor $\xi p_u + \eta p_v$ jest prędkością krzywej $t \mapsto p(u_0 + t\xi, v_0 + t\eta)$ dla dostatecznie małych $|t|$; korzystamy z otwartości dziedziny. $\square$

Definicja 3.3. Parametryzacja wyznacza lokalny *jednostkowy wektor normalny*

$$\nu = \frac{p_u \times p_v}{\|p_u \times p_v\|}. \quad (3.2)$$

Drugi możliwy wybór to $-\nu$. Płaszczyzna styczna ma równanie

$$\langle X - q, \nu(q) \rangle = 0. \quad (3.3)$$

Wybór kolejności parametrów ustala znak normalnej. Zamiana u z v odwraca ten znak. Globalne ciągłe pole normalne, jeśli istnieje, wyznacza orientację powierzchni; lokalny wzór (3.2) nie zapewnia jego istnienia na dowolnej powierzchni.

Stwierdzenie 3.4 (Poziomica i wykres). *Dla regularnej poziomicy $\Phi = 0$ zachodzą*

$$T_q S = \ker d\Phi_q = \{X : \langle \text{grad } \Phi(q), X \rangle = 0\}, \quad \nu = \pm \frac{\text{grad } \Phi}{\|\text{grad } \Phi\|}.$$

Dla wykresu $z = f(x, y)$ normalna skierowana ku górze wynosi

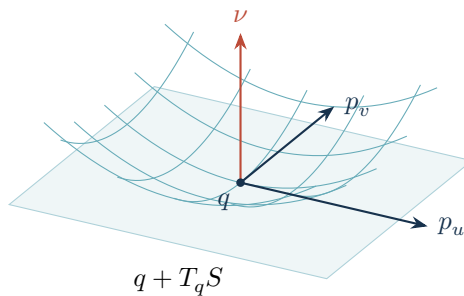
$$\nu = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}. \quad (3.4)$$

Dowód. Z $\Phi \circ \gamma = 0$ wynika $d\Phi_q(\gamma'(0)) = 0$. Dostajemy zawieranie $T_q S \subset \ker d\Phi_q$, a obie przestrzenie mają wymiar 2, więc są równe. Wzór dla wykresu wynika z wyboru $\Phi(x, y, z) = z - f(x, y)$. $\square$

Przykład 3.5. Dla paraboloidy $z = x^2 + y^2$ w punkcie $q = (1, 1, 2)$ mamy $p_u = (1, 0, 2)$, $p_v = (0, 1, 2)$ i $\nu = (-2, -2, 1)/3$. Płaszczyzna styczna ma równanie $z = 2x + 2y - 2$. Dla elipsoidy w punkcie $q = (x_0, y_0, z_0)$ otrzymujemy

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1.$$

Wzór działa także na biegunach, gdzie współrzędne kątowe zawodzą.



Rysunek 2: Powierzchnia i jej płaszczyzna styczna w wierzchołku. Wektory p_u, p_v rozpinają przestrzeń kierunkową płaszczyzny, a ν jest do niej prostopadły.

4 Różniczki i pierwsza forma podstawowa

4.1 Różniczka jako odwzorowanie liniowe

Dla funkcji $f(u, v)$ różniczka w ustalonym punkcie działa na przyrost (ξ, η) według wzoru

$$df(\xi, \eta) = f_u \xi + f_v \eta.$$

Zapis $df = f_u du + f_v dv$ wyraża tę samą funkcję liniową w bazie współrzędnych. Wynika on z rozwinięcia

$$f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v) = f_u \Delta u + f_v \Delta v + o(\sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}).$$

Przy zmianie współrzędnych $u = u(\xi, \eta)$, $v = v(\xi, \eta)$ otrzymujemy

$$du = u_\xi d\xi + u_\eta d\eta, \quad dv = v_\xi d\xi + v_\eta d\eta.$$

Po podstawieniu i zastosowaniu reguły łańcuchowej:

$$df = (f_u u_\xi + f_v v_\xi) d\xi + (f_u u_\eta + f_v v_\eta) d\eta.$$

Zmieniły się współczynniki, ale nie odwzorowanie liniowe. Dla funkcji na powierzchni jej zapis w parametrach to $f \circ p$; te same reguły pokazują niezależność różniczki od wybranych współrzędnych.

Obowiązują reguły

$$d(f + g) = df + dg, \quad d(fg) = g df + f dg, \quad d(\psi \circ f) = \psi'(f) df.$$

Każdą z nich otrzymujemy, stosując odpowiednią regułę do pochodnych cząstkowych.

Przykład 4.1. Niech $f(u, v) = u^2 - v^2$, $\xi = u + v$, $\eta = u - v$. Wtedy $u = (\xi + \eta)/2$, $v = (\xi - \eta)/2$ i $f = \xi\eta$. Zatem

$$df = \eta d\xi + \xi d\eta = (u - v)(du + dv) + (u + v)(du - dv) = 2u du - 2v dv.$$

Oba zapisy opisują tę samą różniczkę.

4.2 Metryka indukowana na powierzchni

Różniczka parametryzacji jest odwzorowaniem liniowym

$$dp_{(u,v)}(\xi, \eta) = \xi p_u + \eta p_v.$$

Skrótowo piszemy $dp = p_u du + p_v dv$. Długość wektora stycznego można więc obliczać na podstawie jego dwóch współrzędnych w bazie p_u, p_v .

Definicja 4.2. *Pierwsza forma podstawowa* powierzchni jest iloczynem skalarnym przestrzeni euklidesowej ograniczonym do wektorów stycznych: $I_q(X, Y) = \langle X, Y \rangle$ dla $X, Y \in T_q S$. W parametrach u, v jej macierz i współczynniki mają postać

$$g = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad E = \langle p_u, p_u \rangle, \quad F = \langle p_u, p_v \rangle, \quad G = \langle p_v, p_v \rangle. \quad (4.1)$$

W zapisie formy kwadratowej:

$$I = ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 = \langle dp, dp \rangle. \quad (4.2)$$

Symbol ds^2 oznacza tutaj formę kwadratową. Nie jest kwadratem jednej globalnej współrzędnej s ani iloczynem zewnętrznym różniczek. Jeśli $X = \xi_1 p_u + \xi_2 p_v$ i $Y = \eta_1 p_u + \eta_2 p_v$, to

$$\begin{aligned}\langle X, Y \rangle &= E\xi_1\eta_1 + F(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) + G\xi_2\eta_2 \\ &= (\xi_1, \xi_2)g \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \quad \|X\|^2 = E\xi_1^2 + 2F\xi_1\xi_2 + G\xi_2^2.\end{aligned}\quad (4.3)$$

Stwierdzenie 4.3 (Dodatnia określoność). *Dla regularnej parametryzacji macierz g jest dodatnio określona. W szczególności*

$$E > 0, \quad G > 0, \quad EG - F^2 = \|p_u \times p_v\|^2 > 0. \quad (4.4)$$

Dowód. Dla $(\xi_1, \xi_2) \neq (0, 0)$ regularność daje $\xi_1 p_u + \xi_2 p_v \neq 0$, więc jego kwadrat normy jest dodatni. To dowodzi dodatniej określoności. Tożsamość Lagrange'a

$$\|A \times B\|^2 = \|A\|^2 \|B\|^2 - \langle A, B \rangle^2$$

otrzymujemy z $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ oraz wzorów na iloczyn skalarny i wektorowy. Podstawienie $A = p_u$, $B = p_v$ daje (4.4). $\square$

Lemat 4.4 (Kryterium Sylwestera w wymiarze dwa). *Dla symetrycznej macierzy $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ następujące warunki są równoważne:*

- (i) *forma $a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2$ jest dodatnio określona;*
- (ii) *obie wartości własne A są dodatnie;*
- (iii) *$a > 0$ i $ac - b^2 > 0$.*

Dowód. Symetryczna macierz jest diagonalizowalna w bazie ortonormalnej, co daje równoważność (i) i (ii). Z (i), podstawiając $(\xi, \eta) = (1, 0)$, otrzymujemy $a > 0$. Po uzupełnieniu kwadratu mamy

$$a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 = a \left(\xi + \frac{b}{a}\eta \right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}\eta^2.$$

Dla $\xi = -b/a$, $\eta = 1$ wynika stąd $ac - b^2 > 0$. Ta sama równość dowodzi (iii) $\Rightarrow$ (i). $\square$

4.3 Zmiana współrzędnych

Niech $\varphi : \tilde{D} \rightarrow D$ będzie dyfeomorfizmem, $\varphi(\xi, \eta) = (u(\xi, \eta), v(\xi, \eta))$ i $\tilde{p} = p \circ \varphi$. Oznaczmy

$$J = D\varphi = \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}.$$

Reguła łańcuchowa daje $[\tilde{p}_\xi \ \tilde{p}_\eta] = [p_u \ p_v]J$. Stąd otrzymujemy prawo transformacji macierzy Grama:

$$\tilde{g} = J^T (g \circ \varphi) J. \quad (4.5)$$

Współczynniki zapisane osobno wynoszą

$$\begin{aligned}\tilde{E} &= Eu_\xi^2 + 2Fu_\xi v_\xi + Gv_\xi^2, \\ \tilde{F} &= Eu_\xi u_\eta + F(u_\xi v_\eta + v_\xi u_\eta) + Gv_\xi v_\eta, \\ \tilde{G} &= Eu_\eta^2 + 2Fu_\eta v_\eta + Gv_\eta^2.\end{aligned}\quad (4.6)$$

Po prawej stronie E, F, G są obliczane w punkcie $\varphi(\xi, \eta)$. Współczynniki zmieniają się, ale wartość formy na danym wektorze stycznym pozostaje taka sama.

Analogicznie dwuliniowość iloczynu wektorowego daje

$$\tilde{p}_\xi \times \tilde{p}_\eta = \det J (p_u \times p_v) \circ \varphi. \quad (4.7)$$

Normalna zachowuje więc zwrot dla $\det J > 0$, a odwraca go dla $\det J < 0$. Ponadto

$$\det \tilde{g} = (\det J)^2 \det(g \circ \varphi). \quad (4.8)$$

4.4 Przykład: stożek bez wierzchołka

Wykres $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ jest gładki dla $(x, y) \neq (0, 0)$. Współrzędne x, y dają

$$I = \left(1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2}\right) dx^2 + \frac{2xy}{x^2 + y^2} dx dy + \left(1 + \frac{y^2}{x^2 + y^2}\right) dy^2.$$

Współrzędne biegunowe $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, $z = r > 0$, prowadzą do parametryzacji

$$p(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi, r).$$

Obliczamy $p_r = (\cos \phi, \sin \phi, 1)$ i $p_\phi = (-r \sin \phi, r \cos \phi, 0)$, zatem

$$E = 2, \quad F = 0, \quad G = r^2, \quad I = 2 dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (4.9)$$

Oba zapisy opisują tę samą metrykę. Punkt $r = 0$ jest wyłączony: nie jest to regularny punkt stożka. Trzy kierunki jego tworzących mogą być liniowo niezależne, podczas gdy dla powierzchni klasy C^1 wszystkie graniczne kierunki siecznych w punkcie należą do jednej dwuwymiarowej przestrzeni stycznej.

5 Pole powierzchni

5.1 Element pola i niezależność od parametrów

Przy małych przyrostach parametrów mamy

$$p(u + \Delta u, v + \Delta v) - p(u, v) = p_u \Delta u + p_v \Delta v + o(\sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}). \quad (5.1)$$

Obraz małego prostokąta w dziedzinie jest w pierwszym przybliżeniu równoległobokiem rozpiętym przez $p_u \Delta u$ i $p_v \Delta v$. Jego pole wynosi $\|p_u \times p_v\| |\Delta u \Delta v|$.

Definicja 5.1. Dla regularnej parametryzacji *element pola* to

$$dA = \|p_u \times p_v\| du dv = \sqrt{EG - F^2} du dv. \quad (5.2)$$

Jeśli $K \subset D$ jest mierzalny i p jest różnowartościową parametryzacją płata, jego pole nad K jest równe

$$A(p(K)) = \iint_K \sqrt{EG - F^2} du dv. \quad (5.3)$$

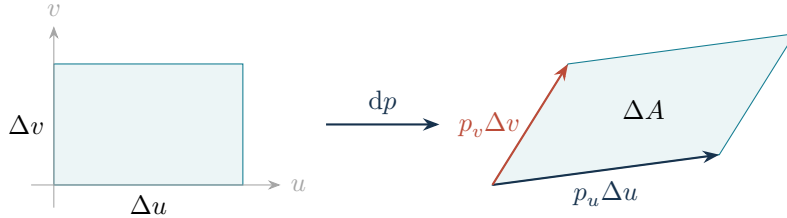
W dalszych przykładach wystarczą obszary o kawałkami gładkim brzegu oraz granice takich obszarów.

Stwierdzenie 5.2. Wartość całki (5.3) nie zależy od wyboru regularnej parametryzacji tego samego płata.

Dowód. Ze wzoru (4.8) wynika

$$\sqrt{\det \tilde{\mathbf{g}}} = |\det J| \sqrt{\det(\mathbf{g} \circ \varphi)}.$$

Jest to dokładnie czynnik występujący w twierdzeniu o zmianie zmiennych w całce podwójnej. Moduł wyznacznika zapewnia, że pole nie zależy również od orientacji parametrów. $\square$



Rysunek 3: Różniczka parametryzacji zamienia prostokąt przyrostów w równoległobok w przestrzeni stycznej. Współczynnik zmiany pola wynosi $\sqrt{EG - F^2}$.

Jeżeli parametryzacja pokrywa fragment powierzchni kilka razy, całka po dziedzinie zlicza pole z tą krotnością. Warunek rzędu 2 sam nie zapewnia, że otrzymamy pole obrazu liczone jednokrotnie. Na powierzchni pokrytej wieloma płacami należy unikać podwójnego liczenia części wspólnych.

5.2 Wykres funkcji

Dla $p(u, v) = (u, v, f(u, v))$ mamy

$$E = 1 + f_u^2, \quad F = f_u f_v, \quad G = 1 + f_v^2,$$

a więc

$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2} \, du \, dv. \quad (5.4)$$

Jest to pole części wykresu leżącej nad D .

Przykład 5.3 (Paraboloida nad dyskiem jednostkowym). Dla $f(x, y) = x^2 + y^2$ nad obszarem $K = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ współrzędne biegunowe w całce dają

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} \, r \, dr \, d\phi = \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1).$$

Użyto podstawienia $w = 1 + 4r^2$, $dw = 8r \, dr$.

5.3 Sfera

Dla sfery o promieniu R , w parametrach z (2.2),

$$E = R^2, \quad F = 0, \quad G = R^2 \cos^2 u, \quad dA = R^2 \cos u \, du \, dv$$

przy $-\pi/2 < u < \pi/2$. Zatem

$$A(S_R^2) = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2 \cos u \, du \, dv = 4\pi R^2.$$

Bieguny i szew parametryzacji mają zerowe pole. Całkę można rozumieć jako granicę całek po regularnych płatach pomijających te zbiory.

5.4 Torus

Niech $a > b > 0$. Obracając okrąg o promieniu b , którego środek jest odległy od osi obrotu o a , otrzymujemy torus:

$$p(u, v) = ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u). \quad (5.5)$$

Parametry u, v są kątami. Pochodne to

$$\begin{aligned} p_u &= b(-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u), \\ p_v &= (a + b \cos u)(-\sin v, \cos v, 0). \end{aligned}$$

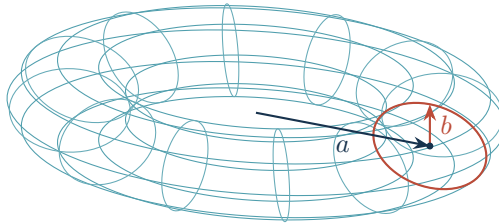
Stąd

$$E = b^2, \quad F = 0, \quad G = (a + b \cos u)^2, \quad dA = b(a + b \cos u) du dv. \quad (5.6)$$

Czynnik $a + b \cos u$ jest dodatni, bo $a > b$. Po jednokrotnym przebiegnięciu obu kątów:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} b(a + b \cos u) du dv \\ &= (2\pi)(2\pi ab + b^2[\sin u]_0^{2\pi}) = \boxed{4\pi^2 ab}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Wnętrze kwadratu $0 < u, v < 2\pi$ jest dziedziną płata, a brakujące szwy nie wpływają na pole całej powierzchni.



Rysunek 4: Torus jako powierzchnia obrotowa. Wyróżniony okrąg południkowy ma promień b , a jego środek zatacza okrąg o promieniu a .

6 Długości, kąty i współrzędne izotermiczne

6.1 Długość krzywej na powierzchni

Niech $c(t) = (u(t), v(t))$, $\alpha \leq t \leq \beta$, będzie krzywą w dziedzinie płata. Odpowiada jej krzywa $\gamma = p \circ c$ na powierzchni. Z reguły łańcuchowej

$$\dot{\gamma} = \dot{u} p_u + \dot{v} p_v, \quad \|\dot{\gamma}\|^2 = E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2.$$

Zatem

$$L(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} dt. \quad (6.1)$$

Współczynniki E, F, G obliczamy w $(u(t), v(t))$. Wzór obowiązuje również dla krzywych kawałkami klasy C^1 . Na ogół $L(p \circ c)$ różni się od euklidesowej długości krzywej c w płaszczyźnie parametrów.

Przykład 6.1 (Krzywe współrzędne na torusie). Na torusie z (5.5) południk $v = v_0$ ma długość $\int_0^{2\pi} b du = 2\pi b$. Równoleżnik $u = u_0$ ma długość $2\pi(a + b \cos u_0)$. W szczególności zewnętrzny równoleżnik ma długość $2\pi(a + b)$, a wewnętrzny $2\pi(a - b)$.

6.2 Kąt między krzywymi

Niech dwie krzywe regularne na płacie przecinają się w punkcie q . Współrzędne ich niezerowych prędkości w tym punkcie oznaczmy przez $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ i $\eta = (\eta_1, \eta_2)$. Wówczas kąt $\theta \in [0, \pi]$ między prędkościami spełnia

$$\cos \theta = \frac{E\xi_1\eta_1 + F(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) + G\xi_2\eta_2}{\sqrt{E\xi_1^2 + 2F\xi_1\xi_2 + G\xi_2^2}\sqrt{E\eta_1^2 + 2F\eta_1\eta_2 + G\eta_2^2}}. \quad (6.2)$$

Jest to zwykły wzór na cosinus kąta, zapisany z użyciem (4.3). Dla krzywych współrzędnych daje

$$\cos \theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}. \quad (6.3)$$

Zatem siatka współrzędnych jest ortogonalna dokładnie wtedy, gdy $F = 0$.

6.3 Współrzędne izotermiczne

Definicja 6.2. Współrzędne nazywamy *izotermicznymi*, jeśli

$$E = G = \lambda^2 > 0, \quad F = 0. \quad (6.4)$$

Wówczas $I = \lambda^2(du^2 + dv^2)$.

Wzór na kąt upraszcza się wtedy do

$$\cos \theta = \frac{\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}\sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}}.$$

Parametryzacja zachowuje kąty: jest lokalnie konforemna. Długości wektorów skaluje przez λ , a pola przez λ^2 ; czynnik ten może zależeć od punktu.

Stwierdzenie 6.3. Regularna parametryzacja zachowuje wszystkie kąty między wektorami w punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy w tym punkcie zachodzi (6.4).

Dowód. Wystarczalność wynika z uproszczonego wzoru na cosinus. Dla konieczności stosujemy zachowanie prostopadłości najpierw do $(1, 0)$ i $(0, 1)$, co daje $F = 0$, a następnie do $(1, 1)$ i $(1, -1)$, co daje $E - G = 0$. Regularność zapewnia $E > 0$. $\square$

Przykład 6.4 (Sfera we współrzędnych stereograficznych). Dla sfery o promieniu R połóżmy $r^2 = u^2 + v^2$ i

$$p(u, v) = \frac{R}{1 + r^2}(2u, 2v, r^2 - 1), \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Jest to parametryzacja sfery bez bieguna $(0, 0, R)$. Jej odwrotność ma postać $(x, y, z) \mapsto (x/(R - z), y/(R - z))$. Rachunek pochodnych daje

$$\langle p_u, p_u \rangle = \langle p_v, p_v \rangle = \frac{4R^2}{(1 + u^2 + v^2)^2}, \quad \langle p_u, p_v \rangle = 0.$$

Zatem

$$I = \frac{4R^2}{(1 + u^2 + v^2)^2}(du^2 + dv^2). \quad (6.5)$$

To współrzędne izotermiczne. Zachowują kąty, lecz nie długości: lokalny czynnik skali wynosi $2R/(1 + u^2 + v^2)$.

7 Lokalne izometrie i rozwijanie powierzchni

Twierdzenie 7.1 (Kryterium zachowania długości). *Niech $p : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie regularną parametryzacją na otwartym zbiorze $D \subset \mathbb{R}^2$. Następujące warunki są równoważne:*

- (i) *Dla każdej gładkiej krzywej $c : [\alpha, \beta] \rightarrow D$ zachodzi $L(p \circ c) = L(c)$, gdzie po prawej stronie mierzymy długość euklidesową w płaszczyźnie parametrów.*
- (ii) *W każdym punkcie D mamy $E = G = 1$ i $F = 0$.*

Dowód. Jeśli (ii) zachodzi, wzór (6.1) staje się $\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{u}^2 + \dot{v}^2} dt = L(c)$.

Założmy teraz (i). Ustalmy $w_0 = (u_0, v_0) \in D$ i wektor $h \in \mathbb{R}^2$. Otwartość D pozwala wybrać $\varepsilon > 0$ tak małe, by odcinek $c(t) = w_0 + th$, $0 \leq t \leq \varepsilon$, leżał w D . Z równości długości mamy

$$\int_0^{\varepsilon} \|dp_{w_0+th}(h)\| dt = \varepsilon \|h\|.$$

Dzielimy przez ε i przechodzimy z ε do zera. Ciągłość różniczki daje $\|dp_{w_0}(h)\| = \|h\|$. Po podniesieniu do kwadratu:

$$E(w_0)h_1^2 + 2F(w_0)h_1h_2 + G(w_0)h_2^2 = h_1^2 + h_2^2.$$

Wybory $h = (1, 0)$, $(0, 1)$ i $(1, 1)$ dają kolejno $E = 1$, $G = 1$, $F = 0$. Punkt w_0 był dowolny. $\square$

Definicja 7.2. Odwzorowanie między powierzchniami nazywamy *lokalną izometrią*, jeśli jest lokalnym dyfeomorfizmem i jego różniczka zachowuje iloczyn skalarny wektorów stycznych. Parametryzacja spełniająca $E = G = 1$, $F = 0$ jest lokalną izometrią z obszaru płaszczyzny.

Z tożsamości polaryzacyjnej wynika, że zachowanie norm zapewnia zachowanie iloczynów skalarnych, a więc również kątów. Lokalna izometria zachowuje długości wszystkich krzywych oraz element pola. Izotermiczność jest warunkiem słabszym: dopuszcza czynnik skali λ różny od 1.

Zachowanie długości krzywych nie oznacza zachowania odległości euklidesowych między ich końcami w $\mathbb{R}^3$. *Odległość wewnętrzna* na powierzchni jest infimum długości krzywych na tej powierzchni łączących dwa punkty. Lokalna izometria zachowuje tę geometrię lokalnie; sam warunek na różniczkę nie daje globalnej różnowartościowości.

7.1 Walec jako zwinięta płaszczyzna

Niech $R > 0$ i

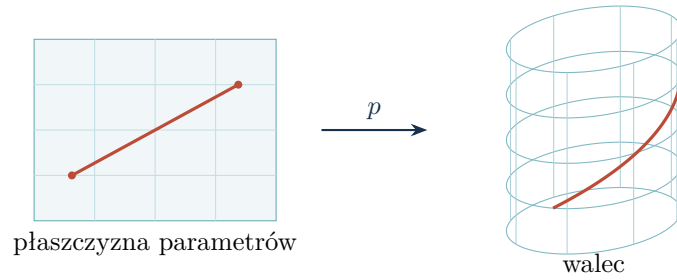
$$p(u, v) = (R \cos(u/R), R \sin(u/R), v), \quad (u, v) \in (-\pi R, \pi R) \times \mathbb{R}. \quad (7.1)$$

Wówczas

$$p_u = (-\sin(u/R), \cos(u/R), 0), \quad p_v = (0, 0, 1),$$

więc $E = G = 1$, $F = 0$. Parametryzacja opisuje walec rozcięty wzdłuż jednej tworzącej i zachowuje długości krzywych. Na przykład odcinek $u \in [0, \pi R/2]$, $v = 0$, o długości $\pi R/2$, przechodzi w łuk okręgu o tej samej długości. Odległość jego końców w przestrzeni wynosi jednak $\sqrt{2}R < \pi R/2$.

Jeśli rozszerzymy u na całą prostą, wzór (7.1) nadal spełnia warunek metryczny, lecz staje się okresowy i wielokrotnie pokrywa walec. Otrzymujemy lokalną, ale nie globalną izometrię między całymi rozważanymi zbiorami.



Rysunek 5: Lokalna izometria płaszczyzny i walca. Odcinek przechodzi w fragment linii śrubowej. Jego długość pozostaje taka sama, choć odległość końców mierzona cięciwą się zmniejsza.

7.2 Rozwinięcie stożka

Dla stożka z (4.9) wprowadzamy nowe współrzędne

$$\rho = \sqrt{2}r, \quad \theta = \frac{\phi}{\sqrt{2}}.$$

Wtedy

$$I = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2, \quad (7.2)$$

czyli otrzymujemy metrykę płaszczyzny we współrzędnych biegunowych. Rozciętemu stożkowi $0 < r < r_0$, $0 < \phi < 2\pi$ odpowiada wycinek koła o promieniu $\sqrt{2}r_0$ i kącie $\sqrt{2}\pi$. Odwzorowanie rozwijające ma postać

$$(r, \phi) \mapsto (\sqrt{2}r \cos(\phi/\sqrt{2}), \sqrt{2}r \sin(\phi/\sqrt{2})).$$

Równość metryk dowodzi zachowania długości. Wierzchołek jest wyłączony; aby otrzymać pojedynczy wycinek, trzeba też wybrać szew. Pole części bocznej stożka wynosi

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \sqrt{2}r \, dr \, d\phi = \sqrt{2}\pi r_0^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2}r_0)^2(\sqrt{2}\pi),$$

co zgadza się z polem wycinka.

8 Zestawienie i zadania

8.1 Najważniejsze wzory

Regularność i normalna:

$$p_u \times p_v \neq 0, \quad T_q S = \text{span}(p_u, p_v), \quad \nu = \frac{p_u \times p_v}{\|p_u \times p_v\|}.$$

Pierwsza forma podstawowa:

$$E = \|p_u\|^2, \quad F = \langle p_u, p_v \rangle, \quad G = \|p_v\|^2, \quad g = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

$$I = E du^2 + 2F du dv + G dv^2, \quad E > 0, \quad EG - F^2 > 0.$$

Pole, długość i zmiana współrzędnych:

$$dA = \sqrt{EG - F^2} du dv, \quad L = \int \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} dt,$$

$$\tilde{g} = J^T (g \circ \varphi) J.$$

Izotermiczność: $E = G > 0$, $F = 0$. **Izometria z płaszczyzny:** $E = G = 1$, $F = 0$.

8.2 Zadania

1. Dla $p(u, v) = (u + v, u - v, u^2 + v^2)$ oblicz E, F, G i $\det g$. Wyznacz płaszczyznę styczną oraz normalną daną przez $p_u \times p_v$ w punkcie $p(0, 0)$.
2. Dla elipsoidy $x^2/4 + y^2/9 + z^2/16 = 1$ podaj regularną parametryzację otoczenia punktu $(0, 0, 4)$. Wyznacz tam płaszczyznę styczną i normalną zewnętrzną.
3. Oblicz pole torusa z $a = 3, b = 1$ oraz długości jego południka, równoleżnika zewnętrznego i wewnętrznego.
4. Na walcu z (7.1) rozważ krzywą $c(t) = (At, Bt)$, $0 \leq t \leq 1$, w przedziale mieszczącym się w płacie. Oblicz jej długość na walcu. Porównaj z odległością końców w $\mathbb{R}^3$.
5. Dla $p(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$, $0 < u < 4\pi$, $0 < v < h$, oblicz całkę elementu pola po dziedzinie i pole obrazu. Wyjaśnij różnicę.
6. Która z macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

może być macierzą pierwszej formy podstawowej? Dla dopuszczalnej macierzy podaj przykład liniowej parametryzacji płaszczyzny.

8.3 Odpowiedzi i wskazówki

1. $p_u = (1, 1, 2u)$, $p_v = (1, -1, 2v)$. Stąd

$$E = 2 + 4u^2, \quad F = 4uv, \quad G = 2 + 4v^2, \quad \det g = 4 + 8u^2 + 8v^2 > 0.$$

W zerze płaszczyzna styczna to $z = 0$, a wskazana normalna jednostkowa wynosi $(0, 0, -1)$.

2. Można wybrać

$$p(u, v) = \left(u, v, 4\sqrt{1 - u^2/4 - v^2/9}\right), \quad u^2/4 + v^2/9 < 1.$$

Płaszczyzna styczna ma równanie $z = 4$, a normalna zewnętrzna wynosi $(0, 0, 1)$.

3. Pole to $12\pi^2$. Długości wynoszą kolejno 2π , 8π i 4π .
4. Długość krzywej wynosi $\sqrt{A^2 + B^2}$. Odległość końców to

$$\sqrt{4R^2 \sin^2(A/(2R)) + B^2}.$$

Jest nie większa od długości krzywej; dla $A \neq 0$ jest mniejsza, ponieważ $|\sin x| < |x|$ dla $x \neq 0$.

5. Mamy $E = G = 1$, $F = 0$. Całka po dziedzinie wynosi $4\pi h$, natomiast pole obrazu wynosi $2\pi h$. Prawie każdy punkt jest pokryty dwukrotnie; wyjątek stanowi jedna tworząca o zerowym polu.
6. $\det A = -1$, więc A nie jest dodatnio określona. Dla B mamy $B_{11} = 2 > 0$ i $\det B = 3 > 0$. Odpowiednią parametryzacją jest

$$p(u, v) = \left(\sqrt{2}u + \frac{v}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}v, 0\right).$$

Jej wektory współrzędne mają kwadraty długości równe 2 i iloczyn skalarny równy 1.