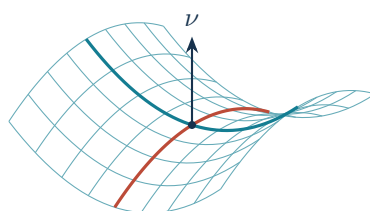


Druga forma podstawowa

Krzywizny powierzchni w $\mathbb{R}^3$

Geometria różniczkowa

Wojciech Domitrz



Konwencja znaków. Przy ustalonej jednostkowej normalnej ν przyjmujemy $\text{II} = -\langle dp, d\nu \rangle$ oraz $\mathcal{W} = -d\mathcal{N}$. Odwrócenie normalnej zmienia znaki krzywizn głównych i średniej, lecz nie zmienia krzywizny Gaussa.

Spis treści

1	Druga forma podstawowa	2
2	Odwzorowanie Gaussa i operator kształtu	4
3	Krzywizny główne i algebra liniowa	5
4	Krzywizna Gaussa i krzywizna średnia	6
5	Krzywizna normalna i wzór Eulera	7
6	Przykłady i metody obliczeń	8
7	Typ punktu i lokalny kształt powierzchni	11
8	Zestawienie i zadania	13

1 Druga forma podstawowa

Rozważamy regularny płat powierzchni $S \subset \mathbb{R}^3$ o parametryzacji $p : D \rightarrow S$, gdzie $D \subset \mathbb{R}^2$ jest otwarty. Wektory p_u, p_v są liniowo niezależne. Wszystkie odwzorowania przyjmujemy jako gładkie; do definicji drugiej formy podstawowej wystarcza regularność klasy C^2 .

Ustalamy jednostkowe pole normalne $\nu : D \rightarrow S^2$:

$$\|\nu\| = 1, \quad \langle p_u, \nu \rangle = \langle p_v, \nu \rangle = 0, \quad S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}.$$

Lokalnie można wziąć $\nu = (p_u \times p_v) / \|p_u \times p_v\|$ albo normalną przeciwną. Globalny wybór wymaga orientowalności powierzchni. Przypomnijmy pierwszą formę podstawową i jej macierz:

$$I = E du^2 + 2F du dv + G dv^2, \quad g = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

gdzie $E = \langle p_u, p_u \rangle$, $F = \langle p_u, p_v \rangle$, $G = \langle p_v, p_v \rangle$. Macierz g jest dodatnio określona, zatem $\Delta := EG - F^2 > 0$.

1.1 Definicja i współczynniki

Definicja 1.1. *Druga forma podstawowa* jest formą dwuliniową na przestrzeni stycznej $T_q S$, $q = p(u, v)$, określoną przez

$$\Pi_q(dp(\xi), dp(\eta)) = -\langle dp(\xi), d\nu(\eta) \rangle, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^2. \quad (1.2)$$

Jej postać kwadratową zapisujemy skrótowo jako $\Pi = -\langle dp, d\nu \rangle$.

Różniczka $dp : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_q S$ jest izomorfizmem, więc wektory ξ, η odpowiadające zadanyim wektorom stycznym są jednoznaczne.

Stwierdzenie 1.2. *Druga forma podstawowa jest symetryczna. W parametrach u, v ma postać*

$$\boxed{\Pi = L du^2 + 2M du dv + N dv^2}, \quad (1.3)$$

gdzie

$$\begin{aligned} L &= \langle p_{uu}, \nu \rangle = -\langle p_u, \nu_u \rangle, \\ M &= \langle p_{uv}, \nu \rangle = -\langle p_u, \nu_v \rangle = -\langle p_v, \nu_u \rangle, \\ N &= \langle p_{vv}, \nu \rangle = -\langle p_v, \nu_v \rangle. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Dowód. Różniczkujemy tożsamości $\langle p_u, \nu \rangle = \langle p_v, \nu \rangle = 0$. Na przykład

$$0 = \partial_v \langle p_u, \nu \rangle = \langle p_{uv}, \nu \rangle + \langle p_u, \nu_v \rangle.$$

Pozostałe wzory otrzymujemy analogicznie. Równość $p_{uv} = p_{vu}$ daje $\langle p_u, \nu_v \rangle = \langle p_v, \nu_u \rangle$, czyli symetrię. Rozwinięcie iloczynu $-\langle p_u du + p_v dv, \nu_u du + \nu_v dv \rangle$ daje (1.3). $\square$

Macierz drugiej formy podstawowej w bazie p_u, p_v oznaczamy przez

$$h = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Dla $X = \xi_1 p_u + \xi_2 p_v$ i $Y = \eta_1 p_u + \eta_2 p_v$ mamy

$$I(X, Y) = \xi^T g \eta, \quad \Pi(X, Y) = \xi^T h \eta.$$

W odróżnieniu od I , forma Π nie musi być dodatnio określona: może być nieokreślona, zdegenerowana albo równa zeru.

1.2 Przybliżenie normalne drugiego rzędu

Niech $w_0 = (u_0, v_0)$, $q = p(w_0)$ i $h = (h_1, h_2)$. Ze wzoru Taylora oraz prostopadłości $\nu(w_0)$ do wektorów stycznych wynika

$$\langle p(w_0 + h) - q, \nu(w_0) \rangle = \frac{1}{2}(Lh_1^2 + 2Mh_1h_2 + Nh_2^2) + o(\|h\|^2). \quad (1.6)$$

Współczynniki po prawej stronie są obliczone w w_0 . Zatem II opisuje odchylenie powierzchni od jej płaszczyzny stycznej w kierunku normalnym, z dokładnością do drugiego rzędu.

Symboliczny zapis

$$II = \langle d^2p, \nu \rangle, \quad d^2p = p_{uu} du^2 + 2p_{uv} du dv + p_{vv} dv^2$$

oznacza skalarną składową normalną drugiej różniczki. Rzut wektorowy to $\langle d^2p, \nu \rangle \nu$. Sama druga różniczka d^2p nie przekształca się jak forma na powierzchni; dopiero jej składowa normalna ma właściwe prawo transformacji.

1.3 Zmiana współrzędnych i normalnej

Niech $\varphi : \tilde{D} \rightarrow D$ będzie dyfeomorfizmem, $\varphi(\xi, \eta) = (u(\xi, \eta), v(\xi, \eta))$. Przyjmujemy $\tilde{p} = p \circ \varphi$ i tę samą normalną geometryczną, czyli $\tilde{\nu} = \nu \circ \varphi$. Oznaczmy

$$J = d\varphi = \begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}.$$

Stwierdzenie 1.3. *Macierze obu form przekształcają się według wzorów*

$$\tilde{g} = J^T(g \circ \varphi)J, \quad \boxed{\tilde{h} = J^T(h \circ \varphi)J.} \quad (1.7)$$

W szczególności II jest niezależna od współrzędnych.

Dowód. Z reguły łańcuchowej $d\tilde{p} = (dp \circ \varphi)J$ i $d\tilde{\nu} = (d\nu \circ \varphi)J$. Podstawienie do definicji obu form daje (1.7). $\square$

Jawnie, przy obliczaniu L, M, N w punkcie $\varphi(\xi, \eta)$,

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= Lu_\xi^2 + 2Mu_\xi v_\xi + Nv_\xi^2, \\ \tilde{M} &= Lu_\xi u_\eta + M(u_\xi v_\eta + v_\xi u_\eta) + Nv_\xi v_\eta, \\ \tilde{N} &= Lu_\eta^2 + 2Mu_\eta v_\eta + Nv_\eta^2. \end{aligned}$$

Zastąpienie ν przez $-\nu$ zmienia II i h na przeciwne. Jeżeli w obu układach normalną wyznaczamy automatycznie z iloczynu wektorowego pochodnych, to

$$\frac{\tilde{p}_\xi \times \tilde{p}_\eta}{\|\tilde{p}_\xi \times \tilde{p}_\eta\|} = \text{sgn}(\det J) \left(\frac{p_u \times p_v}{\|p_u \times p_v\|} \circ \varphi \right).$$

Przy zmianie orientacji parametrów należy więc uwzględnić dodatkowy znak.

2 Odwzorowanie Gaussa i operator kształtu

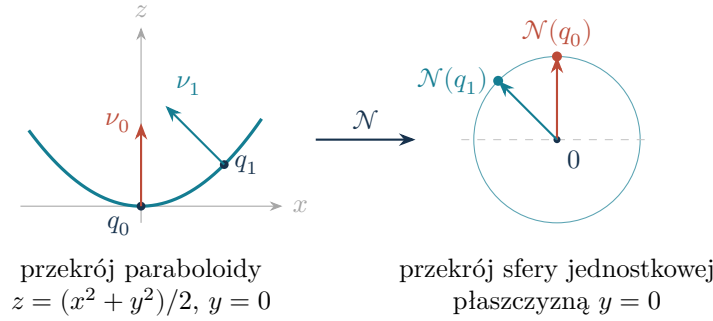
Definicja 2.1. *Odwzorowanie Gaussa* zorientowanego płata to

$$\mathcal{N} : S \longrightarrow S^2, \quad \mathcal{N}(p(u, v)) = \nu(u, v).$$

Operator Weingartena, zwany też operatorem kształtu, to

$$\mathcal{W}_q = -d\mathcal{N}_q : T_q S \longrightarrow T_q S. \quad (2.1)$$

W definicji utożsamiamy liniowe przestrzenie $T_{\nu(q)} S^2 = \nu(q)^\perp = T_q S$. Jest to uzasadnione, ponieważ różniczkowanie $\langle \nu, \nu \rangle = 1$ daje $\langle \nu_u, \nu \rangle = \langle \nu_v, \nu \rangle = 0$.



Rysunek 1: Odwzorowanie Gaussa przenosi jednostkowe normalne na sferę. Operator $\mathcal{W} = -d\mathcal{N}$ mierzy zmianę normalnej przy ruchu po powierzchni.

Twierdzenie 2.2. *Operator $\mathcal{W}$ jest samosprężony względem pierwszej formy podstawowej:*

$$I(\mathcal{W}X, Y) = II(X, Y) = I(X, \mathcal{W}Y). \quad (2.2)$$

Jego macierz w bazie p_u, p_v wynosi

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{g}^{-1}\mathbf{h}} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} GL - FM & GM - FN \\ EM - FL & EN - FM \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Dowód. Dla $X = dp(\xi)$ mamy $\mathcal{W}X = -d\nu(\xi)$. Definicja (1.2) i symetria II dają (2.2). W zapisie macierzowym oznacza to $\mathbf{g}\mathbf{A} = \mathbf{h}$, a odwracalność $\mathbf{g}$ daje (2.3). $\square$

Współrzędne obrazu wektora zapisujemy jako kolumnę. Stąd otrzymujemy wzory Weingartena:

$$\boxed{(\nu_u \quad \nu_v) = - (p_u \quad p_v) \mathbf{A}.} \quad (2.4)$$

Jawnie,

$$\begin{aligned} \nu_u &= \frac{FM - GL}{\Delta} p_u + \frac{FL - EM}{\Delta} p_v, \\ \nu_v &= \frac{FN - GM}{\Delta} p_u + \frac{FM - EN}{\Delta} p_v. \end{aligned}$$

Macierz $\mathbf{A}$ nie musi być symetryczna w zwykłym sensie. W dowolnych współrzędnych właściwą tożsamością jest

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{g} = \mathbf{g}\mathbf{A} = \mathbf{h}. \quad (2.5)$$

Stwierdzenie 2.3. *Przy zmianie współrzędnych i zachowaniu tej samej normalnej*

$$\tilde{\mathbf{A}} = J^{-1}(\mathbf{A} \circ \varphi)J. \quad (2.6)$$

Dowód. Podstawiamy (1.7) do $\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{g}}^{-1}\tilde{\mathbf{h}}$:

$$(J^\top(\mathbf{g} \circ \varphi)J)^{-1}J^\top(\mathbf{h} \circ \varphi)J = J^{-1}(\mathbf{g}^{-1}\mathbf{h} \circ \varphi)J.$$

$\square$

3 Krzywizny główne i algebra liniowa

3.1 Fakty o macierzach symetrycznych

Lemat 3.1. *Rzeczywista macierz symetryczna rozmiaru 2×2 ma rzeczywiste wartości własne i bazę ortonormalną złożoną z wektorów własnych. Jeżeli jest dodatnio określona, jej wartości własne są dodatnie, a odwrotność jest symetryczna i dodatnio określona.*

Dowód. Dla $C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ wielomian charakterystyczny ma postać

$$\lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2, \quad \text{wyróżnik } (a - c)^2 + 4b^2 \geq 0.$$

Wyberzmy jednostkowy wektor własny $e = (x, y)$ odpowiadający λ . Dla $e^\perp = (-y, x)$ mamy $\langle Ce^\perp, e \rangle = \langle e^\perp, Ce \rangle = 0$. Zatem $Ce^\perp = \mu e^\perp$ i $\mu = a + c - \lambda$. Macierz $Q = (e, e^\perp)$ jest ortogonalna, $\det Q = 1$, i

$$Q^T C Q = \text{diag}(\lambda, \mu).$$

Dodatnia określoność daje $\lambda = \langle Ce, e \rangle > 0$ oraz $\mu > 0$. Wzór $C^{-1} = Q \text{diag}(\lambda^{-1}, \mu^{-1}) Q^T$ pokazuje, że odwrotność jest symetryczna i dodatnio określona. Ogólnie, gdy C jest odwracalna, $(C^{-1})^T = (C^T)^{-1} = C^{-1}$. $\square$

Lemat 3.2. *Jeśli C jest symetryczna i dodatnio określona, a B symetryczna, to CB ma rzeczywiste wartości własne i jest diagonalizowalna.*

Dowód. Z poprzedniego lematu definiujemy symetryczną, dodatnio określoną macierz $C^{1/2} = Q \text{diag}(\sqrt{\lambda}, \sqrt{\mu}) Q^T$. Wtedy

$$C^{-1/2}(CB)C^{1/2} = C^{1/2}BC^{1/2}$$

jest symetryczna. Macierze podobne mają te same wartości własne i tę samą własność diagonalizowalności. $\square$

Można też sprawdzić rzeczywistość wartości własnych bez pierwiastka macierzy. W bazie diagonalizującej C , przy $\lambda, \mu > 0$ oraz $Q^T B Q = (b_{ij})$, macierz iloczynu ma postać

$$\begin{pmatrix} \lambda b_{11} & \lambda b_{12} \\ \mu b_{12} & \mu b_{22} \end{pmatrix}.$$

Wyróżnik jej wielomianu charakterystycznego wynosi $(\lambda b_{11} - \mu b_{22})^2 + 4\lambda\mu b_{12}^2 \geq 0$. Może być równy zeru; nie ma podstaw do wymagania ścisłej nierówności.

3.2 Krzywizny i kierunki główne

Definicja 3.3. *Krzywizny główne κ_1, κ_2 w punkcie q to wartości własne operatora $\mathcal{W}_q$. Odpowiadające im proste własne nazywamy kierunkami głównymi.*

Twierdzenie 3.4. *Krzywizny główne są rzeczywiste. W $T_q S$ istnieje ortonormalna baza wektorów głównych e_1, e_2 . Dla różnych krzywizn głównych kierunki główne są prostopadłe. Krzywizny główne, traktowane jako nieuporządkowana para, nie zależą od współrzędnych przy ustalonej normalnej.*

Dowód. W ortonormalnej bazie przestrzeni stycznej samosprężony operator $\mathcal{W}$ ma rzeczywistą macierz symetryczną, więc stosujemy lemat 3.1. Bezpośrednio, jeśli $\mathcal{W}e_i = \kappa_i e_i$, to

$$(\kappa_1 - \kappa_2) \langle e_1, e_2 \rangle = \langle \mathcal{W}e_1, e_2 \rangle - \langle e_1, \mathcal{W}e_2 \rangle = 0.$$

Niezmienniczość wynika z podobieństwa macierzy w (2.6). Rzeczywistość widma wynika też z lematu 3.2, dla $C = g^{-1}$ i $B = h$. $\square$

Uwaga 3.5. Ortonormalność dotyczy wektorów *na powierzchni*. Ich kolumny współrzędnych a, b spełniają $a^\top g b = 0$; nie muszą być prostopadłe dla zwykłego iloczynu $a^\top b$.

Przykład 3.6. Niech w pewnym punkcie $g = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $h = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Wtedy

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \kappa_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Macierz nie jest symetryczna, mimo że operator jest samosprężony. Kolumny własne $(1, \sqrt{2})$ i $(1, -\sqrt{2})$ są ortogonalne względem g . Dane te realizuje w zerze parametryzacja $p(u, v) = (\sqrt{2}u, v, uv)$ z normalną skierowaną w górę.

Definicja 3.7. Punkt jest *umbiliczny*, gdy $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$. Wówczas $W_q = \kappa \text{Id}$, a więc $\Pi_q = \kappa I_q$. Każdy niezerowy wektor styczny wyznacza wtedy kierunek główny.

4 Krzywizna Gaussa i krzywizna średnia

Definicja 4.1. *Krzywizna Gaussa* i *krzywizna średnia* to odpowiednio

$$K = \det W = \kappa_1 \kappa_2, \quad H = \frac{1}{2} \text{tr } W = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}. \quad (4.1)$$

Z (2.3) otrzymujemy podstawowe wzory rachunkowe:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{GL - 2FM + EN}{2(EG - F^2)}. \quad (4.2)$$

Krzywizny główne można wyznaczyć bez obliczania wektorów własnych:

$$\det(h - \kappa g) = 0 \iff \kappa^2 - 2H\kappa + K = 0. \quad (4.3)$$

Stąd

$$\kappa_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}, \quad H^2 - K = \frac{1}{4}(\kappa_1 - \kappa_2)^2 \geq 0. \quad (4.4)$$

Punkt jest umbiliczny wtedy i tylko wtedy, gdy $H^2 = K$.

4.1 Zmiana orientacji i ruchy sztywne

Zmiana $\nu \mapsto -\nu$ powoduje

$$h \mapsto -h, \quad W \mapsto -W, \quad \{\kappa_1, \kappa_2\} \mapsto \{-\kappa_1, -\kappa_2\}, \quad H \mapsto -H, \quad K \mapsto K. \quad (4.5)$$

Przy ustalonej normalnej K i H są niezależne od współrzędnych, gdyż wyznacznik i ślad nie zmieniają się przy podobieństwie macierzy.

Twierdzenie 4.2. Niech $F(x) = Qx + c$ będzie izometrią przestrzeni $\mathbb{R}^3$, gdzie $Q^\top Q = I_3$. Dla $\bar{p} = Qp + c$ wybierzmy $\bar{\nu} = Q\nu$. Wówczas obie formy podstawowe mają te same współczynniki co przed przekształceniem. Zachowane są κ_1, κ_2, K, H . Bez uzgodnienia wyboru normalnych niezmiennikami są K i $|H|$.

Dowód. Pochodne spełniają $\bar{p}_i = Qp_i$, $\bar{p}_{ij} = Qp_{ij}$. Macierz ortogonalna zachowuje iloczyn skalarny, więc

$$\langle \bar{p}_i, \bar{p}_j \rangle = \langle p_i, p_j \rangle, \quad \langle \bar{p}_{ij}, \bar{\nu} \rangle = \langle p_{ij}, \nu \rangle.$$

Zatem $\bar{g} = g$, $\bar{h} = h$ i $\bar{A} = A$. Wybór normalnej przeciwnej stosuje regułę (4.5). $\square$

Izometria przestrzeni a lokalna izometria powierzchni. Ruch sztywny $x \mapsto Qx + c$ zachowuje również sposób osadzenia powierzchni w przestrzeni. Lokalna izometria powierzchni zachowuje pierwszą formę podstawową; nie musi zachowywać Π ani $|H|$. Przykładem jest zwinięcie płaszczyzny w walec. Krzywizna Gaussa jest zachowywana także przez lokalne izometrie powierzchni: jest to treść twierdzenia Gaussa *Theorema egregium*. To silniejsze twierdzenie wymaga osobnego dowodu z geometrii wewnętrznej.

4.2 Rząd odwzorowania Gaussa i zmiana pola

Stwierdzenie 4.3. *W każdym punkcie*

$$\text{rank}(\mathcal{N}) = \text{rank } \mathcal{W} = \text{rank } \mathbf{h}.$$

W szczególności $K = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy ν_u, ν_v są liniowo zależne. Jeśli $K \neq 0$, odwzorowanie Gaussa jest lokalnym dyfeomorfizmem na fragment sfery.

Dowód. Pierwsza równość wynika z $\mathcal{W} = -\mathcal{N}$, a druga z $\mathbf{A} = \mathbf{g}^{-1}\mathbf{h}$ i odwracalności $\mathbf{g}$. Macierz rozmiaru 2×2 ma rząd mniejszy niż 2 dokładnie wtedy, gdy jej wyznacznik jest zerowy. Ostatnia teza wynika z twierdzenia o funkcji odwrotnej zastosowanego w lokalnych współrzędnych. $\square$

Z dwuliniowości iloczynu wektorowego i (2.4) wynika

$$\nu_u \times \nu_v = K(p_u \times p_v), \quad \|\nu_u \times \nu_v\| = |K|\sqrt{EG - F^2}. \quad (4.6)$$

Wartość $|K|$ jest więc lokalnym współczynnikiem zmiany pola przez odwzorowanie Gaussa. Dla pola zorientowanego współczynnikiem jest K . Przy całkowaniu po większym obszarze trzeba uwzględnić ewentualne wielokrotne pokrywanie jego obrazu na sferze.

5 Krzywizna normalna i wzór Eulera

5.1 Krzywa leżąca na powierzchni

Niech $\gamma(s) = p(u(s), v(s))$ będzie krzywą parametryzowaną długością łuku, a $T = \gamma'(s)$ jej jednostkowym wektorem stycznym. *Krzywiznę normalną* krzywej definiujemy jako

$$\kappa_n = \langle \gamma''(s), \nu \rangle.$$

Jest to wielkość ze znakiem, zależnym od wyboru normalnej powierzchni.

Twierdzenie 5.1. *Krzywizna normalna zależy tylko od punktu i kierunku stycznego, a nie od wyboru krzywej o tym kierunku. Dla niezerowego wektora $X = \xi p_u + \eta p_v$ wynosi*

$$\kappa_n(X) = \frac{\Pi(X, X)}{\mathbf{I}(X, X)} = \frac{L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2}{E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2}. \quad (5.1)$$

Dowód. Dla parametru długości łuku reguła łańcuchowa daje

$$\gamma'' = p_{uu}(u')^2 + 2p_{uv}u'v' + p_{vv}(v')^2 + p_u u'' + p_v v''.$$

Iloczyn z ν usuwa ostatnie dwa składniki, więc $\kappa_n = L(u')^2 + 2Mu'v' + N(v')^2 = \Pi(T, T)$. Dla dowolnego $X \neq 0$ podstawiamy $T = X/\|X\|$, co daje (5.1). Każdy kierunek styczny można zrealizować przez krzywą w płacie, na przykład obraz krótkiego odcinka w dziedzinie. $\square$

Jeżeli $\kappa = \|\gamma''\| > 0$ jest krzywizną krzywej jako krzywej w przestrzeni, a $n = \gamma''/\kappa$ jej normalną główną, to

$$\kappa_n = \kappa \langle n, \nu \rangle = \kappa \cos \alpha, \quad (5.2)$$

gdzie α jest kątem między n i ν . Jest to relacja Meusnier. W szczególności $|\kappa_n| \leq \kappa$. *Przekrój normalny* w kierunku X powstaje przez przecięcie powierzchni płaszczyzną $q + \text{span}(X, \nu)$. Lokalnie jest krzywą regularną; jej wektor krzywizny jest równoległy do ν , więc jej zwykła krzywizna w punkcie q jest równa $|\kappa_n(X)|$.

5.2 Ekstremalne krzywizny normalne

Twierdzenie 5.2 (Wzór Eulera). *Niech e_1, e_2 będą ortonormalnymi wektorami głównymi w punkcie q . Dla jednostkowego $X = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$ zachodzi*

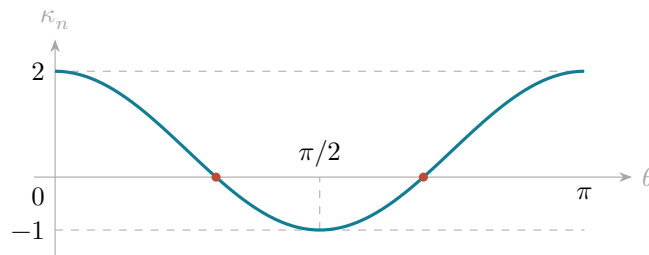
$$\kappa_n(\theta) = \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta. \quad (5.3)$$

Krzywizny główne są najmniejszą i największą wartością krzywizny normalnej.

Dowód. Ponieważ $\mathcal{W}e_i = \kappa_i e_i$, to

$$\kappa_n(X) = \langle \mathcal{W}X, X \rangle = \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta.$$

Jest to kombinacja wypukła κ_1, κ_2 , osiągająca oba końce przedziału dla odpowiednich kierunków głównych. $\square$



Rysunek 2: Wzór Eulera dla $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = -1$. Wyróżnione zera odpowiadają dwóm kierunkom asymptotycznym.

Definicja 5.3. Kierunek $X \neq 0$ jest *asymptotyczny*, jeśli $\text{II}(X, X) = 0$, równoważnie $\kappa_n(X) = 0$.

Jeśli $K < 0$, istnieją dokładnie dwa kierunki asymptotyczne. Jeśli $K > 0$, nie ma żadnego. Przy $K = 0$ i $\mathcal{W} \neq 0$ istnieje jeden, a przy $\mathcal{W} = 0$ wszystkie kierunki są asymptotyczne. Wynika to bezpośrednio z równania $\kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2 = 0$ w bazie głównej.

6 Przykłady i metody obliczeń

6.1 Płaszczyzna, walec i sfera

Przykład 6.1 (Płaszczyzna). Dla $p(u, v) = (u, v, 0)$ i $\nu = (0, 0, 1)$ mamy

$$g = I_2, \quad h = 0, \quad A = 0, \quad \kappa_1 = \kappa_2 = K = H = 0.$$

Normalna jest stała, zatem odwzorowanie Gaussa sprowadza cały płat do jednego punktu sfery.

Przykład 6.2 (Walec o promieniu R). Niech $R > 0$,

$$p(u, v) = (R \cos u, R \sin u, v), \quad \nu(u, v) = (\cos u, \sin u, 0).$$

Wybieramy normalną zewnętrzną; u jest kątem. Po ograniczeniu u do otwartego przedziału długości 2π otrzymujemy płat bez jednej tworzącej. Ponieważ $p_{uu} = -R\nu$, $p_{uv} = p_{vv} = 0$, mamy

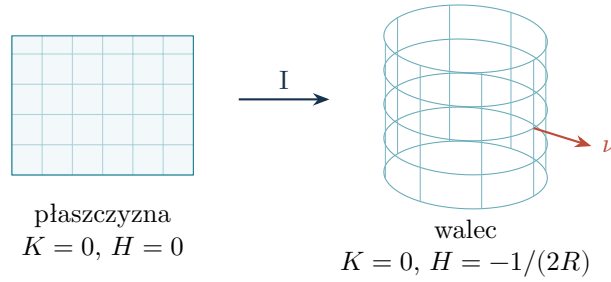
$$g = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1/R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zatem

$$\kappa_u = -\frac{1}{R}, \quad \kappa_v = 0, \quad K = 0, \quad H = -\frac{1}{2R}. \quad (6.1)$$

Krzywizna normalna znika wzdłuż tworzących, a w kierunku okręgów jest równa $-1/R$. Odwzorowanie Gaussa ma rząd 1 i jego obrazem jest równik sfery jednostkowej.

Po zmianie zmiennej $s = Ru$ pierwsza forma podstawowa to $ds^2 + dv^2$. Taką samą metrykę ma płaszczyzna. Zwinięcie $(s, v) \mapsto (R \cos(s/R), R \sin(s/R), v)$ jest więc lokalną izometrią, mimo że $|H|$ zmienia się z 0 na $1/(2R)$.



Rysunek 3: Lokalna izometria zachowuje metrykę, lecz może zmienić drugą formę podstawową i wartość bezwzględną krzywizny średniej.

Przykład 6.3 (Sfera o promieniu R). Na sferze $S_R^2 = \{q : \|q\| = R\}$ wybierzmy normalną wewnętrzną $\nu(q) = -q/R$. Wtedy $d\mathcal{N}_q(X) = -X/R$, a zatem

$$\mathcal{W} = \frac{1}{R} \text{Id}, \quad \Pi = \frac{1}{R} \text{I}, \quad \kappa_1 = \kappa_2 = \frac{1}{R}, \quad K = \frac{1}{R^2}, \quad H = \frac{1}{R}. \quad (6.2)$$

Na przykład parametryzacja

$$p(u, v) = R(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u), \quad -\pi/2 < u < \pi/2,$$

z odpowiednio ograniczonym v , daje

$$g = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \cos^2 u \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \cos^2 u \end{pmatrix}, \quad A = \frac{1}{R} I_2.$$

Każdy punkt sfery jest umbiliczny. Dla normalnej zewnętrznej $\nu(q) = q/R$ krzywizny główne i H wynoszą $-1/R$, natomiast $K = 1/R^2$ pozostaje bez zmiany.

6.2 Wykres funkcji

Niech $p(x, y) = (x, y, f(x, y))$ oraz

$$w = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}, \quad \nu = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{w}.$$

Normalna jest skierowana w górę. Bezpośrednie obliczenie daje

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h} = \frac{1}{w} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Istotnie, $p_{xx} = (0, 0, f_{xx})$ i analogicznie dla pozostałych pochodnych, a $\det \mathbf{g} = w^2$. Z (4.2) otrzymujemy

$$K = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}, \quad (6.4)$$

$$H = \frac{(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy}}{2(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}. \quad (6.5)$$

W punkcie, w którym $f_x = f_y = 0$, zachodzi szczególnie prosta równość

$$\mathbf{g} = I_2, \quad \mathbf{h} = \mathbf{A} = \text{Hess } f. \quad (6.6)$$

Poza takim punktem wartości własne samego hesjanu nie są na ogół krzywiznami głównymi powierzchni.

Przykład 6.4 (Paraboloidy). Dla $f(x, y) = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2)$ w początku układu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad \kappa_1 = a, \quad \kappa_2 = b, \quad K = ab, \quad H = \frac{a+b}{2}.$$

Jeśli $a, b > 0$, punkt jest eliptyczny; jeśli $ab < 0$, hiperboliczny. Dla $a \neq 0, b = 0$ otrzymujemy walec paraboliczny i punkt paraboliczny.

Przykład 6.5 (Siodło o zerowej krzywiznie średniej w jednym punkcie). Dla $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$ wzory (6.4)–(6.5) dają

$$K = -\frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2}, \quad H = \frac{y^2 - x^2}{2(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

W zerze $H = 0$, lecz $K = -1$. Warunek $H = 0$ w jednym punkcie nie oznacza płaskości ani minimalności całej powierzchni. Powierzchnię nazywamy *minimalną*, gdy $H \equiv 0$.

6.3 Torus: trzy typy punktów na jednej powierzchni

Niech $a > b > 0$ i

$$p(u, v) = ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u).$$

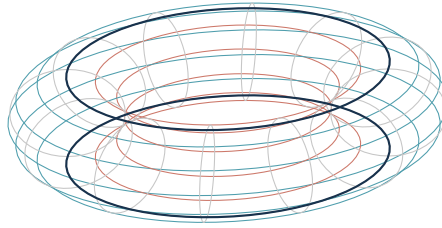
Wybieramy normalną zewnętrzną $\nu = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$. Dla tej kolejności parametrów jest ona przeciwna do $(p_u \times p_v) / \|p_u \times p_v\|$. Mamy

$$\begin{aligned} E &= b^2, & F &= 0, & G &= (a + b \cos u)^2, \\ L &= -b, & M &= 0, & N &= -(a + b \cos u) \cos u. \end{aligned}$$

Obie macierze są diagonalne, więc kierunki współrzędnych są główne i

$$\kappa_u = -\frac{1}{b}, \quad \kappa_v = -\frac{\cos u}{a + b \cos u}, \quad K = \frac{\cos u}{b(a + b \cos u)}. \quad (6.7)$$

Krzywizna średnia wynosi $H = -(a + 2b \cos u) / (2b(a + b \cos u))$. Na zewnętrznej części torusa $K > 0$, na wewnętrznej $K < 0$, a na dwóch równoleżnikach $u = \pi/2, 3\pi/2$ mamy $K = 0$.



Rysunek 4: Torus: turkusowe równoleżniki leżą w obszarze $K > 0$, ceglaste w obszarze $K < 0$. Dwa ciemne równoleżniki wyznaczają $K = 0$. Siatka jest rzutem całej powierzchni, także jej tylnej części.

7 Typ punktu i lokalny kształt powierzchni

7.1 Punkty eliptyczne, hiperboliczne i paraboliczne

Definicja 7.1. Punkt $q \in S$ nazywamy *eliptycznym*, gdy $K(q) > 0$, *hiperbolicznym*, gdy $K(q) < 0$, i *parabolicznym*, gdy $K(q) = 0$.

W tej terminologii przypadek paraboliczny obejmuje dwa różne zachowania:

Warunek	Krzywizny główne	Druga forma podstawowa
$K > 0$	Obie niezerowe, ten sam znak	Określona dodatnio lub ujemnie
$K < 0$	Przeciwnie znaki	Nieokreślona
$K = 0, \mathcal{W} \neq 0$	Dokładnie jedna równa zero	Rząd 1
$\mathcal{W} = 0$	Obie równe zero	Forma zerowa

Punkt z $\mathcal{W}_q = 0$ nazywa się również *punktem płaskim*. Nazwa dotyczy styczności drugiego rzędu z płaszczyzną; nie oznacza, że pewne otoczenie jest płaszczyzną. Spotyka się też węższą konwencję, w której nazwę „paraboliczny” rezerwuje się dla $K = 0, \mathcal{W} \neq 0$.

Twierdzenie 7.2 (Lokalny kształt). *W otoczeniu punktu eliptycznego powierzchnia jest lokalnie ściśle wypukła: po odpowiednim wyborze strony normalnej jest wykresem funkcji ściśle wypukłej i poza punktem styczności leży po jednej stronie jego płaszczyzny stycznej. W otoczeniu punktu hiperbolicznego powierzchnia ma kształt siodła: przyjmuje położenia po obu stronach tej płaszczyzny.*

Dowód. Ruchem sztywnym przenosimy punkt do 0, a jego płaszczyznę styczną do $\{z = 0\}$. Rzut $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ ograniczony do powierzchni ma w tym punkcie odwracalną różniczkę. Twierdzenie o funkcji odwrotnej pozwala zatem zapisać powierzchnię jako $z = f(x, y)$, gdzie

$$f(0) = 0, \quad \nabla f(0) = 0.$$

Wybieramy normalną w górę. Ze wzoru (6.6) mamy $\mathcal{W}_0 = \text{Hess } f(0)$ w bazie osi x, y . Obracając te osie do kierunków głównych, otrzymujemy

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(\kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2) + o(x^2 + y^2). \quad (7.1)$$

Jeśli $K > 0$, obie krzywizny mają ten sam znak. Przy znaku dodatnim istnieje $m > 0$ takie, że $\kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2 \geq m(x^2 + y^2)$. Reszta Taylora jest dla dostatecznie małych argumentów co do modułu mniejsza niż $\frac{1}{4}m(x^2 + y^2)$, stąd $f(x, y) > 0$ poza zerem. Ponadto ciągłość hesjanu zapewnia jego dodatnią określoność na małym dysku, więc f jest tam ściśle wypukła. Przy obu znakach ujemnych stosujemy ten argument do $-f$.

Jeśli $K < 0$, po zamianie osi możemy przyjąć $\kappa_1 > 0$, $\kappa_2 < 0$. Dla dostatecznie małych $t \neq 0$ wzór (7.1) daje $f(t, 0) > 0$ i $f(0, t) < 0$. W każdym otoczeniu zera są więc punkty powierzchni po obu stronach płaszczyzny stycznej. $\square$



Rysunek 5: Lokalne modele drugiego rzędu. Jasne płaszczyzny są styczne w wyróżnionych punktach. W przypadku siodła powierzchnia przechodzi na obie strony swojej płaszczyzny stycznej.

7.2 Dlaczego przypadek $K = 0$ wymaga ostrożności?

Dla $K = 0$ wyraz kwadratowy może nie rozstrzygać o kształcie. W zerze obie funkcje

$$f_+(x, y) = x^2 + y^4, \quad f_-(x, y) = x^2 - y^4$$

mają ten sam hesjan $\text{diag}(2, 0)$, a więc te same formy podstawowe i krzywizny w tym punkcie. Jednak wykres f_+ leży nad płaszczyzną $z = 0$, a wykres f_- ma punkty nad nią i pod nią dowolnie blisko zera.

Podobnie $f = x^4 + y^4$ ma w zerze $\mathcal{W} = 0$, $K = H = 0$, chociaż żadne otoczenie zera na wykresie nie jest częścią płaszczyzny. Rozstrzygają tu wyrazy wyższego rzędu.

Twierdzenie 7.3 (Kryterium płaskości w przestrzeni). *Niech S będzie spójną powierzchnią regularną. Następujące warunki są równoważne:*

- (i) S jest zawarta w pewnej płaszczyźnie;
- (ii) Π znika w każdym punkcie, dla dowolnego lokalnego wyboru normalnej;
- (iii) $K = H = 0$ w każdym punkcie S .

Dowód. Na płaszczyźnie normalna jest lokalnie stała, więc (i) daje (ii). Z $\mathbf{h} = 0$ mamy $\mathbf{A} = 0$, a zatem (ii) daje (iii). Jeżeli $K = H = 0$, to z (4.3) obie krzywizny główne są zerowe. Samosprężoność daje $\mathcal{W} = 0$, więc także $\Pi = 0$.

Pozostaje wykazać, że (ii) implikuje (i). Na każdym spójnym płacie z $\mathcal{W} = -d\mathcal{N} = 0$ wynika stałość normalnej ν_0 . Ponieważ $\langle p_u, \nu_0 \rangle = \langle p_v, \nu_0 \rangle = 0$, funkcja $\langle p, \nu_0 \rangle$ jest stała i cały płat leży w jednej płaszczyźnie. Dwa takie płyty o niepustym przecięciu wyznaczają tę samą płaszczyznę: w punkcie wspólnym mają tę samą afiniczną płaszczyznę styczną. Spójność powierzchni łączy płyty łańcuchami nakładających się otoczeń, więc płaszczyzna jest wspólna dla całego S . $\square$

Uwaga 7.4. Sam warunek $K \equiv 0$ nie wymusza zawierania się w płaszczyźnie; kontrprzykładem jest walec. Powierzchnię z $K \equiv 0$ nazywa się płaską w sensie wewnętrznym. Jest to inny warunek niż $\Pi \equiv 0$.

8 Zestawienie i zadania

8.1 Schemat obliczeń

1. Sprawdź $p_u \times p_v \neq 0$ i wybierz jednostkową normalną ν .
2. Oblicz E, F, G oraz $L = \langle p_{uu}, \nu \rangle$, $M = \langle p_{uv}, \nu \rangle$, $N = \langle p_{vv}, \nu \rangle$.
3. Oblicz K, H ze wzorów (4.2); wyznacz $\kappa_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}$.
4. Aby znaleźć kierunki główne, rozwiąż $(h - \kappa_i g)a_i = 0$ i odtwórz wektory $X_i = (a_i)_1 p_u + (a_i)_2 p_v$.
5. Normalizuj je za pomocą $\|X_i\|^2 = a_i^\top g a_i$.

Dwie formy i operator:

$$g = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}, \quad A = g^{-1}h, \quad \mathcal{W} = -dN.$$

Krzywizny:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{GL - 2FM + EN}{2(EG - F^2)}, \quad \kappa_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}.$$

Kierunek i współrzędne:

$$\kappa_n(X) = \frac{\Pi(X, X)}{I(X, X)}, \quad \tilde{h} = J^\top(h \circ \varphi)J, \quad \tilde{A} = J^{-1}(A \circ \varphi)J.$$

Zmiana ν na $-\nu$ odwraca znaki Π , $\mathcal{W}$, κ_i i H ; wartość K pozostaje ta sama.

8.2 Zadania

1. Dla $p(u, v) = (u, v, \frac{1}{2}(3u^2 + 2uv + 3v^2))$ wyznacz w zerze obie formy podstawowe, krzywizny i kierunki główne, K oraz H . Wybierz normalną w górę.
2. W przykładzie 6.2 przyjmij $R = 2$. Oblicz κ_n w kierunku tworzącym kąt $\pi/3$ z kierunkiem okręgu. Jak zmienia się wynik po odwróceniu normalnej?
3. Dla sfery o promieniu 3 oblicz $\mathcal{W}$, K i H przy normalnej zewnętrznej. Porównaj z normalną wewnętrzną.
4. Na wykresie $z = xy$ oblicz K, H w dowolnym punkcie. W zerze znajdź kierunki główne i asymptotyczne.
5. W punkcie są dane $g = \text{diag}(4, 1)$, $h = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Oblicz A , krzywizny główne oraz unormowane względem g kolumny wektorów własnych.
6. Dla torusa $a = 3$, $b = 1$ z normalną zewnętrzną oblicz K, H na równoleżnikach $u = 0, \pi/2, \pi$ i określ typ punktów.
7. Czy warunek $K = H = 0$ w jednym punkcie wymusza płaskie otoczenie? Czy $K \equiv 0$ wystarcza do tego, aby powierzchnia była częścią płaszczyzny? Uzasadnij odpowiedzi przykładami.

8.3 Odpowiedzi i wskazówki

1. $\mathbf{g} = I_2$, $\mathbf{h} = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Krzywizny wynoszą 4 i 2, a jednostkowe wektory główne to $(1, 1, 0)/\sqrt{2}$ i $(1, -1, 0)/\sqrt{2}$. Stąd $K = 8$, $H = 3$. Punkt jest eliptyczny, lecz nie umbiliczny.
2. $\kappa_n = (-1/2) \cos^2(\pi/3) = -1/8$. Przy normalnej przeciwnej wynik wynosi $1/8$.
3. Dla normalnej zewnętrznej $\mathcal{W} = -\frac{1}{3} \text{Id}$, $K = 1/9$, $H = -1/3$. Przy normalnej wewnętrznej $\mathcal{W} = \frac{1}{3} \text{Id}$, $H = 1/3$, a K się nie zmienia.
4. $K = -1/(1 + x^2 + y^2)^2$, $H = -xy/(1 + x^2 + y^2)^{3/2}$. W zerze macierz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ma krzywizny 1, -1 i kierunki $(1, 1, 0)$, $(1, -1, 0)$. Kierunki asymptotyczne to osie x, y , gdyż $\Pi(X, X) = 2\xi\eta$.
5. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\kappa_{\pm} = \pm 1$. Można wziąć $a_{\pm} = (1, \pm 2)/(2\sqrt{2})$; wtedy $a_{\pm}^T \mathbf{g} a_{\pm} = 1$ i $a_{+}^T \mathbf{g} a_{-} = 0$.
6. Dla $u = 0$: $K = 1/4$, $H = -5/8$ (punkty eliptyczne). Dla $u = \pi/2$: $K = 0$, $H = -1/2$ (punkty paraboliczne). Dla $u = \pi$: $K = -1/2$, $H = -1/4$ (punkty hiperboliczne).
7. Nie w obu przypadkach. Pierwszy kontrprzykład to $z = x^4 + y^4$ w zerze; drugi to dowolny walec kołowy. Kryterium 7.3 wymaga $K = H = 0$ we wszystkich punktach spójnej powierzchni.