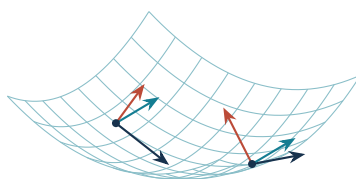


# Równania strukturalne

Ruchoma rama i krzywizna powierzchni

Geometria różniczkowa

Wojciech Domitrz



**Konwencja indeksów.** Przyjmujemy  $de_i = \sum_j \omega_i^j e_j$ , czyli  $\omega_i^j = \langle de_i, e_j \rangle$ . Dla  $\omega = \omega_1^2$  równanie Gaussa ma postać  $d\omega = -K \theta_1 \wedge \theta_2$ .

## Spis treści

|   |                                                     |    |
|---|-----------------------------------------------------|----|
| 1 | Rama ortonormalna i formy dualne                    | 2  |
| 2 | Krótki rachunek form różniczkowych                  | 3  |
| 3 | Formy połączenia                                    | 4  |
| 4 | Wyprowadzenie równań strukturalnych                 | 4  |
| 5 | Druga forma podstawowa i równania Gaussa–Codazziego | 6  |
| 6 | Krzywizna jako niezmiennik metryki                  | 7  |
| 7 | Przykłady                                           | 9  |
| 8 | Zestawienie i zadania                               | 11 |

# 1 Rama ortonormalna i formy dualne

Niech  $S \subset \mathbb{R}^3$  będzie gładką powierzchnią regularną, a  $x : S \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  jej włożeniem:  $x(q) = q$ . Pracujemy na otwartym fragmencie  $U \subset S$ , na którym wybieramy gładkie pola wektorowe  $e_1, e_2, e_3$  spełniające

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \quad T_q S = \text{span}(e_1(q), e_2(q)), \quad e_3 = e_1 \times e_2. \quad (1.1)$$

Trójkę tę nazywamy *dostosowaną ramą ortonormalną*. Wektory  $e_1, e_2$  są styczne, a  $e_3$  jest jednostkową normalną. Rama może zmieniać się wraz z punktem, stąd określenie *ruchoma rama*. Jej istnienie jest lokalne; nie zakładamy, że można ją wybrać na całym  $S$ .

## 1.1 Konstrukcja z parametryzacji

Niech  $p(u, v)$  będzie regularną parametryzacją. Oznaczmy  $E = \langle p_u, p_u \rangle$ ,  $F = \langle p_u, p_v \rangle$ ,  $G = \langle p_v, p_v \rangle$  i  $\Delta = EG - F^2 > 0$ . Ortonormalizacja Grama-Schmidta daje

$$e_1 = \frac{p_u}{\sqrt{E}}, \quad e_2 = \frac{Ep_v - Fp_u}{\sqrt{E\Delta}}, \quad e_3 = \frac{p_u \times p_v}{\sqrt{\Delta}}. \quad (1.2)$$

Mianowniki są dodatnie, więc pola są gładkie. Bezpośrednie obliczenie iloczynów skalarnych potwierdza (1.1).

## 1.2 Koramka i metryka

Różniczka włożenia utożsamia  $X \in T_q S$  z tym samym wektorem w  $\mathbb{R}^3$ . Definiujemy formy stopnia 1 na  $U$  przez

$$\theta_i(X) = \langle dx(X), e_i \rangle, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.3)$$

Ponieważ  $dx(X)$  jest styczny, mamy

$$\boxed{dx = \theta_1 e_1 + \theta_2 e_2, \quad \theta_3 = 0.} \quad (1.4)$$

Formy  $\theta_1, \theta_2$  tworzą *koramkę dualną* do  $e_1, e_2$ :

$$\theta_i(e_j) = \delta_{ij} \quad (i, j \in \{1, 2\}).$$

W szczególności są liniowo niezależne w każdym punkcie  $U$ .

Formy  $\theta_i$  są określone na wektorach *stycznych do powierzchni*. Wektor  $e_3$  nie jest styczny, więc nie podstawiamy go do  $\theta_i$ . Równość  $\theta_3 = 0$  nie oznacza, że znika normalna  $e_3$ ; oznacza, że przemieszczenie styczne nie ma składowej normalnej.

Z ortonormalności wynika

$$I(X, Y) = \theta_1(X)\theta_1(Y) + \theta_2(X)\theta_2(Y), \quad I = \theta_1^2 + \theta_2^2. \quad (1.5)$$

Dla ramy (1.2) otrzymujemy jawnie

$$\theta_1 = \sqrt{E} du + \frac{F}{\sqrt{E}} dv, \quad \theta_2 = \sqrt{\frac{\Delta}{E}} dv. \quad (1.6)$$

Wstawienie do (1.5) daje  $I = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$ .

## 2 Krótki rachunek form różniczkowych

### 2.1 Iloczyn zewnętrzny

Dla form stopnia 1,  $\eta$  i  $\zeta$ , definiujemy

$$(\eta \wedge \zeta)(X, Y) = \eta(X)\zeta(Y) - \eta(Y)\zeta(X).$$

Iloczyn jest dwuliniowy i antysymetryczny:

$$\eta \wedge \zeta = -\zeta \wedge \eta, \quad \eta \wedge \eta = 0. \quad (2.1)$$

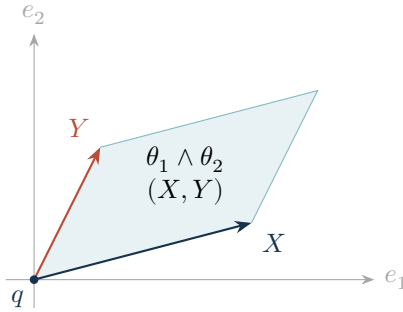
We współrzędnych

$$(A du + B dv) \wedge (C du + D dv) = (AD - BC) du \wedge dv. \quad (2.2)$$

Zatem

$$\theta_1 \wedge \theta_2 = \sqrt{\Delta} du \wedge dv \quad (2.3)$$

jest formą pola zgodną z orientacją ramy. Jej wartość na parze wektorów stycznych jest zorientowanym polem rozpiętego przez nie równoległoboku.



**Rysunek 1:** Iloczyn zewnętrzny form dualnych mierzy zorientowane pole. Zamiana  $X$  i  $Y$  zmienia znak.

*Uwaga 2.1.* Zapis  $\theta_i^2$  w metryce oznacza iloczyn tensorowy  $\theta_i \otimes \theta_i$ , czyli formę symetryczną. Nie jest to  $\theta_i \wedge \theta_i$ , które zawsze jest zerem.

### 2.2 Różniczka zewnętrzna i reguła znaku

Dla funkcji  $f$  i formy  $\eta = A du + B dv$  mamy

$$df = f_u du + f_v dv, \quad d\eta = (B_u - A_v) du \wedge dv. \quad (2.4)$$

W szczególności  $d(df) = 0$ , ponieważ  $f_{uv} = f_{vu}$ . Ogólnie  $d^2 = 0$ . Dla formy  $\eta$  stopnia  $k$  zachodzi

$$d(\eta \wedge \zeta) = d\eta \wedge \zeta + (-1)^k \eta \wedge d\zeta. \quad (2.5)$$

Ta reguła jest kluczowa przy wyprowadzaniu równań strukturalnych.

Odwzorowanie wektorowe  $x = (x^1, x^2, x^3)$  oraz pola  $e_i$  różniczkujemy składowo. Jeśli  $\eta$  jest formą stopnia 1, a  $e : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  polem, to

$$\boxed{d(\eta e) = (d\eta)e - \eta \wedge de.} \quad (2.6)$$

Wzór jest stosowaną składowo regułą (2.5), ponieważ każda składowa  $e$  jest funkcją, czyli formą stopnia 0.

**Przykład 2.2.** Dla  $\eta = u dv - v du$  otrzymujemy  $d\eta = 2 du \wedge dv$ . Natomiast  $u du + v dv = d((u^2 + v^2)/2)$  ma różniczkę równą zeru. Pierwsza forma nie jest więc lokalnie różniczką żadnej funkcji.

### 3 Formy połączenia

Każdą pochodną ramy rozkładamy w bazie  $e_1, e_2, e_3$ .

**Definicja 3.1.** *Formy połączenia  $\omega_i^j$  definiujemy przez*

$$de_i = \sum_{j=1}^3 \omega_i^j e_j, \quad \omega_i^j(X) = \langle de_i(X), e_j \rangle. \quad (3.1)$$

Dolny indeks wskazuje różniczkowany wektor; górny wskazuje składową wyniku.

**Stwierdzenie 3.2.** *Macierz form połączenia jest antysymetryczna:*

$$\omega_i^j = -\omega_j^i, \quad \omega_i^i = 0. \quad (3.2)$$

*Dowód.* Różniczkujemy  $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ :

$$0 = \langle de_i, e_j \rangle + \langle e_i, de_j \rangle = \omega_i^j + \omega_j^i.$$

Dla  $i = j$  otrzymujemy  $2\omega_i^i = 0$ . □

Wystarczą więc trzy formy:

$$\omega = \omega_1^2, \quad \alpha = \omega_1^3, \quad \beta = \omega_2^3. \quad (3.3)$$

Równania ruchomej ramy przyjmują postać

$$\begin{cases} de_1 = \omega e_2 + \alpha e_3, \\ de_2 = -\omega e_1 + \beta e_3, \\ de_3 = -\alpha e_1 - \beta e_2. \end{cases} \quad (3.4)$$

Forma  $\omega$  opisuje składową styczną zmiany ramy. Formy  $\alpha, \beta$  opisują jej składowe normalne, a więc zginanie powierzchni w przestrzeni. Ich wartości zależą od kierunku, w którym różniczkujemy.

Na przykład wzdłuż krzywej  $\gamma(t)$  pierwsze równanie oznacza

$$\frac{d}{dt} e_1(\gamma(t)) = \omega(\dot{\gamma}) e_2 + \alpha(\dot{\gamma}) e_3.$$

Nie utożsamiamy formy  $\omega$  z funkcją ani z pojedynczym wektorem.

## 4 Wyprowadzenie równań strukturalnych

### 4.1 Pierwsze równania: różniczkowanie włożenia

**Twierdzenie 4.1.** *Koramka i formy połączenia spełniają*

$$\begin{cases} d\theta_1 = \omega \wedge \theta_2, \\ d\theta_2 = -\omega \wedge \theta_1, \\ \alpha \wedge \theta_1 + \beta \wedge \theta_2 = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

*Dowód.* Z  $d^2x = 0$ , (1.4) i reguły (2.6):

$$\begin{aligned} 0 &= d(\theta_1 e_1 + \theta_2 e_2) \\ &= (d\theta_1)e_1 + (d\theta_2)e_2 - \theta_1 \wedge de_1 - \theta_2 \wedge de_2 \\ &= (d\theta_1 + \theta_2 \wedge \omega)e_1 + (d\theta_2 - \theta_1 \wedge \omega)e_2 - (\theta_1 \wedge \alpha + \theta_2 \wedge \beta)e_3. \end{aligned}$$

Rama jest bazą w każdym punkcie, więc każdy współczynnik jest zerem. Antysymetria iloczynu zewnętrznego daje dokładnie (4.1).  $\square$

W oryginalnych indeksach te same równania mają postać

$$d\theta_1 = \omega_1^2 \wedge \theta_2, \quad d\theta_2 = \omega_2^1 \wedge \theta_1, \quad 0 = \omega_3^1 \wedge \theta_1 + \omega_3^2 \wedge \theta_2. \quad (4.2)$$

Ostatnie równanie jest równaniem dla  $d\theta_3 = 0$ . Jednolicie, przy  $\theta_3 = 0$ ,

$$d\theta_i = \sum_{j=1}^3 \omega_i^j \wedge \theta_j, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.3)$$

## 4.2 Drugie równania: różniczkowanie ramy

**Twierdzenie 4.2.** *Formy połączenia spełniają*

$$d\omega_i^j = \sum_{k=1}^3 \omega_i^k \wedge \omega_k^j. \quad (4.4)$$

Trzy niezależne równania to

$$d\omega = -\alpha \wedge \beta, \quad d\alpha = \omega \wedge \beta, \quad d\beta = -\omega \wedge \alpha. \quad (4.5)$$

*Dowód.* Różniczkujemy  $de_i = \sum_j \omega_i^j e_j$ :

$$\begin{aligned} 0 &= d^2 e_i = \sum_j (d\omega_i^j) e_j - \sum_j \omega_i^j \wedge de_j \\ &= \sum_j \left( d\omega_i^j - \sum_k \omega_i^k \wedge \omega_k^j \right) e_j. \end{aligned}$$

Liniowa niezależność ramy daje (4.4). Podstawienie (3.3) i antysymetrii daje (4.5). Na przykład  $d\omega_1^2 = \omega_1^3 \wedge \omega_3^2 = \alpha \wedge (-\beta) = -\alpha \wedge \beta$ .  $\square$

Dla kontroli pozostałych znaków można rozpisać bezpośrednio

$$\begin{aligned} d^2 e_1 &= (d\omega + \alpha \wedge \beta) e_2 + (d\alpha - \omega \wedge \beta) e_3, \\ d^2 e_2 &= (-d\omega - \alpha \wedge \beta) e_1 + (d\beta + \omega \wedge \alpha) e_3. \end{aligned}$$

Równania uzyskane z różnych wektorów ramy są zgodne; nie są sześcioma niezależnymi warunkami.

### 4.3 Zapis macierzowy i konwencja znaku

Ustawmy formy w macierzy według reguły  $\Omega_{ij} = \omega_i^j$ :

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega & \alpha \\ -\omega & 0 & \beta \\ -\alpha & -\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Przez iloczyn macierzy form rozumiemy  $(\Omega \wedge \Omega)_{ij} = \sum_k \Omega_{ik} \wedge \Omega_{kj}$ . Wtedy

$$d\Omega = \Omega \wedge \Omega. \quad (4.6)$$

Jeśli zamiast tego używamy macierzy ramy z wektorami jako kolumnami,  $\mathcal{E} = (e_1 \ e_2 \ e_3)$ , to  $d\mathcal{E} = \mathcal{E}\widehat{\Omega}$ , gdzie  $\widehat{\Omega} = \Omega^T = -\Omega$ . Odpowiadające równanie brzmi

$$d\widehat{\Omega} + \widehat{\Omega} \wedge \widehat{\Omega} = 0.$$

To ten sam układ zapisany z inną organizacją indeksów.

## 5 Druga forma podstawowa i równania Gaussa–Codazziego

### 5.1 Symetria drugiej formy: lemat Cartana w wymiarze dwa

**Lemat 5.1.** *Jeśli  $\theta_1, \theta_2$  są liniowo niezależne i  $\alpha \wedge \theta_1 + \beta \wedge \theta_2 = 0$ , to istnieją jednoznaczne funkcje  $a, b, c$  takie, że*

$$\alpha = a\theta_1 + b\theta_2, \quad \beta = b\theta_1 + c\theta_2. \quad (5.1)$$

*Dowód.* Zapiszmy  $\alpha = a\theta_1 + b\theta_2$  i  $\beta = \tilde{b}\theta_1 + c\theta_2$ . Założenie daje  $(\tilde{b} - b)\theta_1 \wedge \theta_2 = 0$ . Ponieważ  $\theta_1 \wedge \theta_2 \neq 0$ , mamy  $\tilde{b} = b$ . Jednoznaczność pozostałych współczynników wynika z tego, że koramka jest bazą.  $\square$

Przyjmujemy normalną  $\nu = e_3$  i konwencję  $\mathcal{W} = -d\nu$ ,  $\Pi = -\langle dx, d\nu \rangle$ . Z (3.4) i (5.1) wynika

$$\Pi = a\theta_1^2 + 2b\theta_1\theta_2 + c\theta_2^2, \quad [\mathcal{W}]_{e_1, e_2} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Iloczyn  $\theta_1\theta_2$  oznacza tu iloczyn symetryczny:  $\frac{1}{2}(\theta_1 \otimes \theta_2 + \theta_2 \otimes \theta_1)$ . W szczególności

$$K = ac - b^2, \quad H = \frac{a+c}{2}. \quad (5.3)$$

Macierz operatora kształtu jest symetryczna, ponieważ tym razem pracujemy w *ortonormalnej* bazie przestrzeni stycznej.

### 5.2 Równanie Gaussa

**Twierdzenie 5.2.** *Krzywizna Gaussa spełnia*

$$\boxed{d\omega = -K\theta_1 \wedge \theta_2.} \quad (5.4)$$

Równoważnie,  $d\omega_2^1 = K\theta_1 \wedge \theta_2$ .

*Dowód.* Ze wzorów (5.1), (2.1) i (5.3):

$$\alpha \wedge \beta = (ac - b^2)\theta_1 \wedge \theta_2 = K \theta_1 \wedge \theta_2.$$

Podstawiamy to do pierwszego równania w (4.5).  $\square$

Równania strukturalne pełnej ramy w  $\mathbb{R}^3$  nie oznaczają, że  $K = 0$ . Różniczka formy stycznej  $\omega$  zawiera wkład od form normalnych  $\alpha, \beta$ . Na zakrzywionej powierzchni ich iloczyn zewnętrzny może być niezerowy, mimo że otaczająca przestrzeń euklidesowa jest płaska.

### 5.3 Równania Codazziego

Dwa pozostałe równania w (4.5) to *równania Codazziego* (zwane też równaniami Mainardiego–Codazziego):

$$\begin{cases} d(a\theta_1 + b\theta_2) = \omega \wedge (b\theta_1 + c\theta_2), \\ d(b\theta_1 + c\theta_2) = -\omega \wedge (a\theta_1 + b\theta_2). \end{cases} \quad (5.5)$$

Wyrażają zgodność zmian drugiej formy podstawowej ze zmianą ramy stycznej. Ich dowód jest już zawarty w różniczkowaniu  $de_1, de_2$ .

Równania Gaussa i Codazziego są warunkami koniecznymi, które muszą spełniać pierwsza i druga forma podstawowa tej samej powierzchni. Nie można więc zadawać ich współczynników całkowicie niezależnie. Przykład niezgodnych danych znajduje się w zadaniu 7..

## 6 Krzywizna jako niezmiennik metryki

### 6.1 Forma styczna jest wyznaczona przez koramkę

**Lemat 6.1.** *Dla zadanej koramki ortonormalnej  $\theta_1, \theta_2$  istnieje dokładnie jedna forma  $\omega$  spełniająca  $d\theta_1 = \omega \wedge \theta_2$  i  $d\theta_2 = -\omega \wedge \theta_1$ .*

*Dowód.* Na powierzchni każda forma stopnia 2 jest wielokrotnością  $\theta_1 \wedge \theta_2$ . Zapiszmy więc

$$d\theta_1 = A\theta_1 \wedge \theta_2, \quad d\theta_2 = B\theta_1 \wedge \theta_2.$$

Forma  $\omega = A\theta_1 + B\theta_2$  spełnia oba równania. Jeśli  $\tilde{\omega}$  jest drugim rozwiązaniem, to ich różnica  $\eta = r\theta_1 + s\theta_2$  spełnia  $\eta \wedge \theta_2 = 0$  i  $\eta \wedge \theta_1 = 0$ . Stąd  $r = s = 0$ .  $\square$

Do wyznaczenia  $\omega$  nie potrzebujemy drugiej formy podstawowej. Po obliczeniu dw równanie (5.4) wyznacza  $K$ . Trzeba jeszcze sprawdzić, że wynik nie zależy od wybranej koramki.

### 6.2 Obrót ramy stycznej

Niech  $\varphi$  będzie gładką funkcją. Obróćmy ramę według wzorów

$$\tilde{e}_1 = \cos \varphi e_1 + \sin \varphi e_2, \quad \tilde{e}_2 = -\sin \varphi e_1 + \cos \varphi e_2, \quad \tilde{e}_3 = e_3. \quad (6.1)$$

Odpowiednia koramka ma postać

$$\tilde{\theta}_1 = \cos \varphi \theta_1 + \sin \varphi \theta_2, \quad \tilde{\theta}_2 = -\sin \varphi \theta_1 + \cos \varphi \theta_2. \quad (6.2)$$

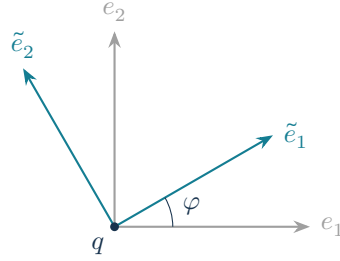
Iloczyn  $\tilde{\theta}_1 \wedge \tilde{\theta}_2$  jest równy  $\theta_1 \wedge \theta_2$ .

**Stwierdzenie 6.2.** Po obrocie (6.1) formy połączenia zmieniają się zgodnie z

$$\boxed{\tilde{\omega} = \omega + d\varphi,} \quad \tilde{\alpha} = \cos \varphi \alpha + \sin \varphi \beta, \quad \tilde{\beta} = -\sin \varphi \alpha + \cos \varphi \beta. \quad (6.3)$$

W szczególności  $d\tilde{\omega} = d\omega$ .

*Dowód.* Różniczkujemy pierwszy wzór (6.1). Składniki z pochodną kąta dają  $d\varphi \tilde{e}_2$ , a styczne składniki pochodnych  $e_1, e_2$  dają  $\omega \tilde{e}_2$ . Iloczyn skalarny wyniku z  $\tilde{e}_2$  daje  $\tilde{\omega} = \omega + d\varphi$ . Składowa normalna daje wzór na  $\tilde{\alpha}$ ; drugi wektor ramy daje wzór na  $\tilde{\beta}$ . Równość różniczek wynika z  $d^2\varphi = 0$ .  $\square$



**Rysunek 2:** Obrót ramy w tej samej płaszczyźnie stycznej. Kąt może zależeć od punktu. Forma  $\omega$  zmienia się o  $d\varphi$ , ale jej różniczka, a zatem krzywizna, pozostaje ta sama.

Dwie zgodnie zorientowane ramy ortonormalne różnią się lokalnie takim obrotem. Jeśli orientacje są przeciwne, wystarczy dodatkowo zmienić  $e_2$  na  $-e_2$  i  $e_3$  na  $-e_3$ . Wtedy  $\omega \mapsto -\omega$  oraz  $\theta_1 \wedge \theta_2 \mapsto -\theta_1 \wedge \theta_2$ , więc wartość  $K$  w (5.4) także pozostaje bez zmiany.

**Twierdzenie 6.3** (Theorema egregium Gaussa). *Krzywizna Gaussa zależy wyłącznie od pierwszej formy podstawowej. W szczególności lokalne izometrie powierzchni zachowują  $K$ .*

*Dowód.* Metryka pozwala wybrać lokalnie koramkę ortonormalną. Na przykład (1.6) konstruuje ją z  $E, F, G$ . Lemat 6.1 wyznacza z niej  $\omega$ , a (5.4) wyznacza  $K$ . Poprzednie obliczenia dowodzą niezależności wyniku od wyboru ramy i jej orientacji.

Dokładniej, niech  $F : S \rightarrow \tilde{S}$  będzie lokalną izometrią. Ściągnięcie koramki ortonormalnej z  $\tilde{S}$  przez  $F$  daje koramkę ortonormalną na  $S$ . Dla formy  $\eta$  oznacza to  $(F^*\eta)_q(X) = \eta_{F(q)}(dF_q X)$ . Różniczka zewnętrzna i iloczyn zewnętrzny komutują ze ściąganiem, co wynika z reguły łańcuchowej. Z jednoznaczności formy połączenia wynika więc, że ściąga się także  $\tilde{\omega}$ . Po ściągnięciu równania Gaussa otrzymujemy  $K(q) = \tilde{K}(F(q))$ .  $\square$

### 6.3 Wzór we współrzędnych ortogonalnych

Jeśli  $I = E du^2 + G dv^2$ , gdzie  $E, G > 0$ , możemy wziąć  $\theta_1 = \sqrt{E} du$ ,  $\theta_2 = \sqrt{G} dv$ . Pierwsze równania strukturalne dają

$$\omega = -\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} du + \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} dv. \quad (6.4)$$

Istotnie,  $d\theta_1 = -(\sqrt{E})_v du \wedge dv$  i  $d\theta_2 = (\sqrt{G})_u du \wedge dv$ . Różniczkując (6.4), otrzymujemy

$$\boxed{K = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} \right) \right].} \quad (6.5)$$

W szczególności dla współrzędnych izotermicznych,  $I = e^{2f}(du^2 + dv^2)$ , mamy

$$\omega = -f_v du + f_u dv, \quad K = -e^{-2f}(f_{uu} + f_{vv}). \quad (6.6)$$

Są to wzory wewnętrzne: nie wymagają znajomości parametryzacji w  $\mathbb{R}^3$ .

## 7 Przykłady

### 7.1 Płaszczyzna i obracająca się rama

Na płaszczyźnie  $z = 0$  w kartezjańskiej ramie stałej mamy

$$\theta_1 = du, \quad \theta_2 = dv, \quad \omega = \alpha = \beta = 0, \quad K = H = 0.$$

Rozważmy teraz współrzędne biegunowe na płacie z  $r > 0$ :

$$p(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, 0),$$

przy kącie w otwartym przedziale o długości mniejszej niż  $2\pi$ . Wybierzmy ramę

$$e_1 = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \quad e_2 = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1).$$

Wtedy

$$\theta_1 = dr, \quad \theta_2 = r d\varphi, \quad \omega = d\varphi, \quad \alpha = \beta = 0. \quad (7.1)$$

Sprawdźmy znaki:

$$d\theta_1 = 0 = d\varphi \wedge r d\varphi, \quad d\theta_2 = dr \wedge d\varphi = -d\varphi \wedge dr.$$

Ponieważ  $d\omega = 0$ , nadal  $K = 0$ . Niezerowa forma połączenia nie oznacza niezerowej krzywizny: może wynikać wyłącznie z obracania się wybranej ramy.

### 7.2 Walec

Niech  $R > 0$  i

$$p(s, t) = (R \cos(s/R), R \sin(s/R), t).$$

Na płacie bez szwu wybieramy

$$e_1 = (-\sin(s/R), \cos(s/R), 0), \quad e_2 = (0, 0, 1), \quad e_3 = (\cos(s/R), \sin(s/R), 0).$$

Mamy  $e_3 = e_1 \times e_2$ ; jest to normalna zewnętrzna. Wprost z różniczkowania:

$$\theta_1 = ds, \quad \theta_2 = dt, \quad \omega = 0, \quad \alpha = -\frac{1}{R} ds, \quad \beta = 0. \quad (7.2)$$

Zatem

$$I = ds^2 + dt^2, \quad II = -\frac{1}{R} ds^2, \quad K = 0, \quad H = -\frac{1}{2R}.$$

Metryka i forma styczna  $\omega$  są takie jak na płaszczyźnie, lecz składowa normalna  $\alpha$  jest niezerowa. Równanie Gaussa daje  $d\omega = -\alpha \wedge \beta = 0$ .

### 7.3 Sfera

Niech  $R > 0$  i

$$p(u, v) = R(\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u), \quad 0 < u < \pi,$$

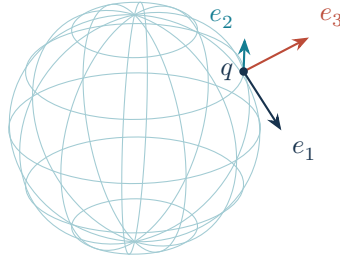
z kątem  $v$  w otwartym przedziale długości  $2\pi$ . Parametryzacja pomija bieguny i jeden południk. Wybieramy

$$\begin{aligned} e_1 &= (\cos u \cos v, \cos u \sin v, -\sin u), \\ e_2 &= (-\sin v, \cos v, 0), \\ e_3 &= (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u) = p/R. \end{aligned}$$

Jest to dodatnio zorientowana rama z normalną zewnętrzną. Mamy

$$\theta_1 = R du, \quad \theta_2 = R \sin u dv, \quad \omega = \cos u dv, \quad \alpha = -du, \quad \beta = -\sin u dv. \quad (7.3)$$

Na przykład  $de_1 = (\cos u dv)e_2 - (du)e_3$ , co od razu wyznacza  $\omega, \alpha$ .



**Rysunek 3:** Rama na sferze:  $e_1$  jest styczny do południka,  $e_2$  do równoleżnika, a  $e_3$  jest normalną zewnętrzną.

Weryfikacja drugich równań strukturalnych daje

$$\begin{aligned} d\omega &= -\sin u du \wedge dv = -\alpha \wedge \beta, \\ d\alpha &= 0 = \omega \wedge \beta, \\ d\beta &= -\cos u du \wedge dv = -\omega \wedge \alpha. \end{aligned}$$

Ponieważ  $\theta_1 \wedge \theta_2 = R^2 \sin u du \wedge dv$ , otrzymujemy

$$K = \frac{1}{R^2}, \quad a = c = -\frac{1}{R}, \quad b = 0, \quad H = -\frac{1}{R}.$$

Minus w krzywiznach głównych wynika z normalnej zewnętrznej i konwencji  $\mathcal{W} = -de_3$ . Wszystkie punkty sfery, także bieguny, mają to samo  $K$ ; pominięcie biegunów dotyczy jedynie użytych współrzędnych.

### 7.4 Metryka izotermiczna: obliczenie bez normalnej

Sfera w parametrach stereograficznych ma metrykę

$$I = \frac{4R^2}{(1 + u^2 + v^2)^2} (du^2 + dv^2).$$

Przyjmujemy  $f = \log(2R) - \log(1 + u^2 + v^2)$ . Wtedy

$$f_{uu} + f_{vv} = -\frac{4}{(1 + u^2 + v^2)^2}.$$

Wzór (6.6) daje ponownie  $K = 1/R^2$ . W tym rachunku występuje wyłącznie pierwsza forma podstawowa.

## 8 Zestawienie i zadania

### 8.1 Równania do zapamiętania

**Rama i koramka:**

$$dx = \theta_1 e_1 + \theta_2 e_2, \quad de_1 = \omega e_2 + \alpha e_3, \quad de_2 = -\omega e_1 + \beta e_3, \quad de_3 = -\alpha e_1 - \beta e_2.$$

**Równania strukturalne:**

$$\begin{aligned} d\theta_1 &= \omega \wedge \theta_2, & d\theta_2 &= -\omega \wedge \theta_1, & \alpha \wedge \theta_1 + \beta \wedge \theta_2 &= 0, \\ d\omega &= -\alpha \wedge \beta, & d\alpha &= \omega \wedge \beta, & d\beta &= -\omega \wedge \alpha. \end{aligned}$$

**Krzywizny i zmiana ramy:**

$$\begin{aligned} \alpha &= a\theta_1 + b\theta_2, & \beta &= b\theta_1 + c\theta_2, & K &= ac - b^2, & H &= \frac{a+c}{2}, \\ d\omega &= -K \theta_1 \wedge \theta_2, & \tilde{\omega} &= \omega + d\varphi. \end{aligned}$$

### 8.2 Zadania

1. Oblicz  $(u du + v dv) \wedge (-v du + u dv)$  oraz  $d(u^2 dv)$ .
2. Na płaszczyźnie obróć stałą ramę ortonormalną o kąt  $\varphi(u, v) = u^2 + v$ . Wyznacz nową koramkę, formę  $\omega$  i krzywiznę  $K$ .
3. Dla walca o promieniu  $R = 2$  w parametrach (7.2) podaj  $\theta_1, \theta_2, \omega, \alpha, \beta$ , a następnie  $K, H$ .
4. W przykładzie sfery przyjmij  $R = 3$ . Sprawdź oba pierwsze równania strukturalne i oblicz  $K$  z  $d\omega$ .
5. Dla metryki  $I = du^2 + f(u)^2 dv^2$ , gdzie  $f > 0$ , wyznacz  $\omega$  i  $K$ . Zastosuj wynik do  $f(u) = u$  na  $u > 0$ ,  $f(u) = \sin u$  na  $(0, \pi)$  oraz  $f(u) = e^u$ .
6. W pewnym punkcie, względem koramki ortonormalnej, mamy  $\alpha = 2\theta_1 + 3\theta_2$  i  $\beta = 3\theta_1 - \theta_2$ . Oblicz  $K, H$ , krzywizny główne oraz współczynnik przy  $\theta_1 \wedge \theta_2$  w  $d\omega$  w tym punkcie.
7. Czy na otwartym obszarze mogą być jednocześnie pierwszą i drugą formą podstawową pewnej powierzchni formy  $I = du^2 + dv^2$  i  $II = du^2 + dv^2$ ? Uzasadnij odpowiedź równaniem Gaussa.

### 8.3 Odpowiedzi i wskazówki

1. Wyniki to odpowiednio  $(u^2 + v^2) du \wedge dv$  i  $2u du \wedge dv$ .
2.  $\tilde{\theta}_1 = \cos \varphi du + \sin \varphi dv$ ,  $\tilde{\theta}_2 = -\sin \varphi du + \cos \varphi dv$ . Mamy  $\tilde{\omega} = 2u du + dv$ ,  $d\tilde{\omega} = 0$ , zatem  $K = 0$ . Formy  $\alpha, \beta$  są zerowe.
3.  $\theta_1 = ds$ ,  $\theta_2 = dt$ ,  $\omega = 0$ ,  $\alpha = -\frac{1}{2}ds$ ,  $\beta = 0$ . Stąd  $K = 0$ ,  $H = -1/4$  przy normalnej zewnętrznej.
4.  $d\theta_1 = 0 = \omega \wedge \theta_2$  oraz  $d\theta_2 = 3 \cos u du \wedge dv = -\omega \wedge \theta_1$ . Dalej  $d\omega = -\sin u du \wedge dv$  i  $\theta_1 \wedge \theta_2 = 9 \sin u du \wedge dv$ , więc  $K = 1/9$ .
5. Dla  $\theta_1 = du$ ,  $\theta_2 = f dv$  otrzymujemy  $\omega = f' dv$ ,  $K = -f''/f$ . W podanych przykładach  $K$  wynosi kolejno 0, 1,  $-1$ . Ostatni wynik dotyczy metryki jako danej wewnętrznej i nie zakłada globalnego włożenia tego obszaru w  $\mathbb{R}^3$ .
6.  $K = 2 \cdot (-1) - 3^2 = -11$ ,  $H = 1/2$ ,  $\kappa_{1,2} = (1 \pm 3\sqrt{5})/2$ . Równanie Gaussa daje w tym punkcie  $d\omega = 11 \theta_1 \wedge \theta_2$ .
7. Nie. Dla  $\theta_1 = du$ ,  $\theta_2 = dv$  pierwsze równania wymuszają  $\omega = 0$ , zatem  $K = 0$ . Tymczasem zadana druga forma daje  $a = c = 1$ ,  $b = 0$ , czyli  $K = 1$ . Obie wartości są sprzeczne.