# Wojciech Domitrz : Geometria różniczkowa, wykład 7

Niech $V, W$ będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem $\mathbb{K}$.

Def. **Iloczynem tensorowym** przestrzeni liniowych $V$ i $W$ nazywamy przestrzeń liniową $Y$ o tej własności, że istnieje przekształcenie 2-liniowe $h: V\times W \to Y$ zależne tylko od $V$ i $W$ takie, że dla każdego przekształcenia 2-liniowego z $V\times W$ w przestrzeń liniową $Z$ $f: V\times W \to Z$ istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $g: Y \to Z$ takie, że $f = g\circ h : V\times W \to Z$ tzn. następujący diagram jest przemienny

$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f"'] & Y \arrow[d, dashed, "g"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Iloczyn tensorowy $V$ i $W$ oznaczamy $V\otimes W$.

Konstrukcja $V^*\otimes W^*$, gdzie $V^*$ i $W^*$ przestrzeni dualnych do $V$ i $W$.

$v^*\in V^*$, $w\in W^*$ $\quad (v^*\otimes w^*)(v,w) = v^*(v)\, w^*(w) \quad \forall v\in V \ \forall w\in W \quad v^*\otimes w^* \in \mathcal{L}(V,W;\mathbb{K})$

przekształcenie 2-liniowe $V\times W \to \mathbb{K}$

$(\alpha_1 v_1^* + \alpha_2 v_2^*)\otimes w = \alpha_1(v_1^*\otimes w^*) + \alpha_2(v_2^*\otimes w^*) \quad \forall v_1^*, v_2^*\in V^* \ \forall w^*\in W^* \ \forall \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{K}$

$v^*(\alpha_1 w_1^* + \alpha_2 w_2^*) = \alpha_1(v\otimes w_1^*) + \alpha_2(v\otimes w_2^*) \quad \forall v^*\in V^* \ \forall w_1^*, w_2^*\in W^*$

$V^*\otimes W^* = \mathcal{L}(V,W;\mathbb{K})$ $\quad$ Ogólnie $V\otimes W = \mathcal{L}(V^*,W^*;\mathbb{K})$ $\quad h(v,w) = v\otimes w$, $(v\otimes w)(v^*,w^*) = v^*(v)\cdot w^*(w)$

Niech $V_1,\dots,V_r$ przestrzenie liniowe nad ciałem $\mathbb{K}$.

$V_1\otimes\dots\otimes V_r = \mathcal{L}(V_1^*,\dots,V_r^*;\mathbb{K})$ - przestrzeń liniowa przekształceń $r$-liniowych $V_1^*\times\dots\times V_r^* \to \mathbb{K}$

$h(v_1,\dots,v_r) = v_1\otimes\dots\otimes v_r \qquad (v_1\otimes\dots\otimes v_r)(u_1^*,\dots,u_r^*) = u_1^*(v_1)\cdot\ldots\cdot u_r^*(v_r)$

Def. Tensorem typu $(r,s)$ nazywamy element przestrzeni $\underbrace{V\otimes\ldots\otimes V}_{r}\otimes\underbrace{V^*\otimes\ldots\otimes V^*}_{s}$

$\underbrace{V\otimes\ldots\otimes V}_{r}\otimes\underbrace{V^*\otimes\ldots\otimes V^*}_{s}=\mathcal{L}(\underbrace{V^*,\ldots,V^*}_{r},\underbrace{V,\ldots,V}_{s};\mathbb{K})$ Tensor typu $(r,s)$ to przekształcenie $(r+s)$-liniowe $t:(V^*)^r\times V^s\to\mathbb{K}$

M - rozmaitość gładka

Def. Polem tensorowym typu $(r,s)$ na M nazywamy odwzorowanie $t: M\ni x\mapsto t_x\in\underbrace{T_xM\otimes\ldots\otimes T_xM}_{r}\otimes\underbrace{T_x^*M\otimes\ldots\otimes T_x^*M}_{s}$

czyli $t_x:(T_x^*M)^r\times(T_xM)^s\to\mathbb{R}$ jest przekształceniem $(r+s)$ - liniowym.

Def. Pole tensorowe typu $(0,s)$ na M jest gładkie, jeśli $\forall\ X_1,\ldots,X_s\in\mathfrak{X}(M)$ funkcja $t(X_1,\ldots,X_s)$ określona wzorem $t(X_1,\ldots,X_s)(x)=t_x(X_1|_x,\ldots,X_s|_x)$ jest gładka.

Tensor typu $(1,s)$ to przekształcenie $(1+s)$-liniowe $t: V^*\times(V)^s\to\mathbb{K}$ $\quad t(v^*,w_1,\ldots,w_s)\in\mathbb{K}$

Stąd przekształcenie $\underbrace{V\times\ldots\times V}_{s}\ni(w_1,\ldots,w_s)\mapsto t(\cdot,w_1,\ldots,w_s)$, $t(\cdot,w_1,\ldots,w_s): V^*\ni v^*\mapsto t(v^*,w_1,\ldots,w_s)\in\mathbb{K}$ jest liniowe.

$t(\cdot,w_1,\ldots,w_s)\in(V^*)^*\simeq V$ czyli $\underbrace{V\times\ldots\times V}_{s}\ni(w_1,\ldots,w_s)\mapsto t(\cdot,w_1,\ldots,w_s)\in V$

Stąd tensory typu $(1,s)$ można utożsamiać z przekształceniami s-liniowymi $\underbrace{V\times\ldots\times V}_{s}\to V$ $\quad\mathcal{L}(V,\ldots,V;V)$

Def. Polem tensorowym typu $(1,s)$ na M nazywamy przekształcenie $t: M\ni x\mapsto t_x\in\mathcal{L}(\underbrace{T_xM,\ldots,T_xM}_{s};T_xM)$

Def. Pole tensorowe typu $(1,s)$ na M jest gładkie jeżeli $\forall\ X_1,\ldots,X_r\in\mathfrak{X}(M)$ pole wektorowe $t(X_1,\ldots,X_s)$ określone wzorem $t(X_1,\ldots,X_s)|_x=t_x(X_1|_x,\ldots,X_s|_x)\in T_xM$ jest gładkie czyli $t(X_1,\ldots,X_s)\in\mathfrak{X}(M)$

Def. **Koneksją liniową** lub **pochodną kowariantną** na $M$ nazywamy przekształcenie

$$\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \ni (X,Y) \to \nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$$ spełniające warunki

1) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$ 2) $\nabla_X(\alpha Y + \beta Z) = \alpha \nabla_X Y + \beta \nabla_X Z$ 3) $\nabla_X(fY) = X(f)\cdot Y + f\nabla_X Y$

dla $\forall\, X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$ $\forall\, f,g \in C^\infty(M)$ $\forall\, \alpha,\beta \in \mathbb{R}$

Tw. $\nabla$ - koneksja liniowa na $M$, $x \in M$. $\forall\, X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ wektor $(\nabla_X Y)|_x$ zależy tylko od $X|_x$ i od wartości pola $Y$ wzdłuż krzywej $\gamma: [-\varepsilon,\varepsilon] \to M$ gładkiej i t, że $\dot\gamma(0) = X|_x$

Niech $U \subset M$ otwarty oraz $X,Y \in \mathfrak{X}(U)$. Wtedy $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}(U)$.

Niech $(U,\varphi)$ – mapa na $U$, $\dim M = m$ oraz $\partial_1, \dots, \partial_m$ - kanoniczny reper wyznaczony przez $U$.

$\nabla_{\partial_i}\partial_j \in \mathfrak{X}(M)$ $\quad \nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma^s_{ij}\partial_s$ Funkcje $\Gamma^s_{ij}$ nazywamy **symbolami Christoffela** lub **współrzędnymi koneksji liniowej**.

Niech $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ $\quad X = X^i\partial_i \quad Y = Y^j\partial_j$. Wtedy $\nabla_X Y = \nabla_{X^i\partial_i}(Y^j\partial_j) = X^i\nabla_{\partial_i}(Y^j\partial_j) = X^i\left((\partial_i Y^j)\partial_j + Y^j\nabla_{\partial_i}\partial_j\right) =$

$$= X^i\left((\partial_i Y^j)\partial_j + Y^j\Gamma^s_{ij}\partial_s\right) = X^i\left((\partial_i Y^s)\partial_s + Y^j\Gamma^s_{ij}\partial_s\right) = X^i\left(\partial_i Y^s + Y^j\Gamma^s_{ij}\right)\partial_s$$

Niech:

$x \in M$, $X|_x = \dot\gamma(0)$ Wtedy $(\nabla_X Y)|_x = \left(\frac{d(Y^s\circ\gamma)}{dt}\Big|_{t=0} + X^i(x)Y^j(x)\Gamma^s_{ij}(x)\right)\partial_s|_x \quad (*)$

**Tensor torsji** lub **skręcenia** to tensor typu $(1,2)$ określony wzorem $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$

**Tensor krzywizny** koneksji $\nabla$ to tensor typu $(1,3)$ określony wzorem $R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$

Tw. $\nabla, \hat{\nabla}$ koneksje liniowe na $M$ to $S(X,Y) = \hat{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$ jest tensorem typu $(1,2)$. Odwrotnie jeśli $\nabla$ jest koneksją liniową oraz $S$ jest tensorem typu $(1,2)$ to $\hat{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + S(X,Y)$ jest koneksją liniową.

Tw. Jeżeli $M$ jest przestrzenią parazwartą to istnieją koneksje liniowe na $M$.

Def. Koneksję na $M$ nazywamy płaską jeżeli $T=0$ i $R=0$.

Wniosek. $\dim M = 1$ to każda koneksja na $M$ jest płaska.

Polem wektorowym wzdłuż krzywej gładkiej $\gamma : I \to M$ nazywamy przekształcenie $X: I \ni t \mapsto X(t) \in T_{\gamma(t)} M$

$(U, \varphi)$ mapa na $M$ oraz $\gamma(t) \in U$. Wtedy $X(t) = X^i(t) \partial_i|_{\gamma(t)}$. Pole $X$ jest gładkie jeżeli $X^i(t)$ są gładkie. $\mathfrak{X}_\gamma(M)$ - pola gładkie wzdłuż $\gamma$.

Niech $\gamma : I \to M$ gładka, $X \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$. Niech $(\nabla_\gamma X)(t) \stackrel{def}{=} \nabla_{\dot{\gamma}(t)} X$

$$(\nabla_\gamma X)^i(t_0) = \frac{dX^i}{dt}(t_0) + \Gamma^i_{js}(\gamma(t_0)) \frac{d\gamma^j}{dt}(t_0) X^s(t_0) \quad (z\ (*)) \qquad \nabla_\gamma X \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$$

Tw. Pochodna $\nabla_\gamma : \mathfrak{X}_\gamma(M) \to \mathfrak{X}_\gamma(M)$ jest liniowa nad $\mathbb{R}$ oraz $\forall f: I \to \mathbb{R}$ gładka i $X \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$ zachodzi

$$\nabla_\gamma(fX) = \frac{df}{dt} X + f \nabla_\gamma X$$

Def. Pole $X \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$ nazywamy równoległym wzdłuż $\gamma$ jeżeli $\nabla_\gamma X = 0$.

Tw. $(U, \varphi)$ - mapa. Pole $X \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$ jest równoległe wzdłuż $\gamma \iff$ współrzędne pola $X^1, \dots, X^n$ $(X = X^i \partial_i)$ spełniają równanie $\frac{dX^i}{dt} + (\Gamma^i_{js} \circ \gamma) \frac{d\gamma^j}{dt} X^s = 0$

Tw. Jeżeli $\gamma : I \to M$ jest gładka to $\forall\, t_0 \in I$ $\forall\, v \in T_{\gamma(t_0)}M$ $\exists!\, X \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$ równoległe wzdłuż $\gamma$ t, że $X(t_0)=v$.

Na podstawie powyższego tw. definiujemy przesunięcie równoległe wzdłuż $\gamma$.

$x, y \in M$ $\gamma : [a,b] \to M$ gładka t, że $\gamma(a)=x$, $\gamma(b)=y$. Definiujemy przekształcenie

$\tau_\gamma : T_xM \to T_yM$, $\tau_\gamma(v) = X(b)$, gdzie $X$ jest jedynym polem $X \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$ takim, że $X(a)=v$. Przekształcenie $\tau_\gamma$ nazywamy **przesunięciem równoległym wzdłuż** $\gamma$.

Tw. $\tau_\gamma : T_xM \to T_yM$ jest izomorfizmem liniowym. Odwrotne do $\tau_\gamma$ to przesunięcie równoległe wzdłuż krzywej $\tilde{\gamma}$ danej wzorem $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(b-t+a)$

Def. Krzywą $\gamma$ nazywamy **geodezyjną** jeżeli pole prędkości $\gamma$ jest równoległe wzdłuż $\gamma$ czyli $P_\gamma \dot{\gamma} = 0$.

Tw. Krzywa $\gamma$ jest geodezyjną $\iff$ $\frac{d^2\gamma^i}{dt} + (\Gamma^i_{js} \circ \gamma)\frac{d\gamma^j}{dt}\frac{d\gamma^s}{dt} = 0$ dla $i=1,\dots,m$.