Wydział MiNI PW
Geometria różniczkowa
Zestaw zadań nr 4

2 grudnia 2014

1. Czy $\phi : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto (e^x \cos y, e^x \sin y)$ jest dyfeomorfizmem ? Jeśli nie to znaleźć maksymalny podzbiór otwarty $U \subset \mathbb{R}^2$ taki, że $\phi|_U : U \to \phi(U)$ jest dyfeomorfizmem.
2. Czy istnieje dyfeomorfizm koła otwartego na kwadrat otwarty?
3. Czy istnieje dyfeomorfizm podzbiorów otwartych $\mathbb{R}^2$ przekształcający koło domknięte na kwadrat domknięty?
4. Wykaż, że zbiory są rozmaitościami
   (a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy + yz + zx = -1, xyz = 1\}$,
   (b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^3 + z^4 = 2, x^2 + z = 2\}$,
   (c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - xy - 4yz - 8z^2 - 4z + 2y = 0, xy = 1\}$,
   (d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy = z^2 - 3, yz = x + x^2\}$,
   (e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 = y^2 z, y \neq 0\}$,
   (f) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sin z = \mathrm{sh}x \cdot \mathrm{sh}y\}$.
5. Wykaż, że następujące zbiory są podrozmaitościami $M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$
   (a) $SL(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) | \det A = 1\}$,
   (b) $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) | A^T \cdot A = 1\}$
6. Znajdź dyfeomorfizmu okręgu $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ na zbiór $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 = 1\}$.
7. Wykaż, że cykloida $C = \{(t - \sin t, 1 - \cos t) : t \in \mathbb{R}\}$ nie jest podrozmaitością właściwą $\mathbb{R}^2$.