

Geometria różniczkowa : Twierdzenie o postaci izometrii w $\mathbb{R}^n$.

$\mathbb{R}^n$ - p. euklidesowa z metryką $d(x,y) = |x-y| = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Def. $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest izometrią $\mathbb{R}^n$ jeżeli $|F(x) - F(y)| = |x - y|$ dla każdego $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Tw. F jest izometrią $\mathbb{R}^n$ jeżeli $F = T_b \circ L$ gdzie $T_b(x) = x + b$ ($b = F(0)$) oraz $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ p. liniowe ortogonalne tzn. $Lx \cdot Ly = x \cdot y$ czyli $L^T L = E_n$.

Dowód.: Niech $L(x) := F(x) - F(0)$ $L(0) = 0$ oraz $F(x) = (T_{F(0)} \circ L)(x)$, bo $F(x) = (F(x) - F(0)) + F(0) = L(x) + F(0)$

$$|L(x) - L(y)| = |F(x) - F(0) - F(y) + F(0)| = |F(x) - F(y)| = |x - y| \text{ dla każdego } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

$$\text{Stąd } |L(x)| = |L(x) - 0| = |L(x) - L(0)| = |x - 0| = |x| \text{ dla } x \in \mathbb{R}^n.$$

$$\text{Lemat: } x \cdot y = \frac{1}{2} (|x|^2 + |y|^2 - |x - y|^2)$$

$$\text{Dowód Lematu: } \frac{1}{2} (|x|^2 + |y|^2 - (x - y) \cdot (x - y)) = \frac{1}{2} (|x|^2 + |y|^2 - (x \cdot x - x \cdot y - y \cdot x + y \cdot y)) = x \cdot y \quad \square$$

$$L(x) \cdot L(y) = \frac{1}{2} (|L(x)|^2 + |L(y)|^2 - |L(x) - L(y)|^2) = \frac{1}{2} (|x|^2 + |y|^2 - |x - y|^2) = x \cdot y$$

$$\text{Stąd } L(x) \cdot L(y) = x \cdot y$$

Niech $e_1, \dots, e_n$ - baza ortonormalna $\mathbb{R}^n$ tzn. $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$ $i, j = 1, \dots, n$

Wtedy $L(e_i) \cdot L(e_j) = e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$ dla $i, j = 1, \dots, n$ czyli $L(e_1), \dots, L(e_n)$ - baza ortonormalna

Niech $x \in \mathbb{R}^n$ wtedy $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ gdzie $x_i = x \cdot e_i$

Niech $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ liniowe oraz $A(e_i) = L(e_i)$ dla $i = 1, \dots, n$

$$\text{Wtedy } A(x) = A\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i A(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i L(e_i)$$

$$L(x) \cdot L(e_i) = x \cdot e_i = x_i \quad A(x) \cdot L(e_i) = \sum_{j=1}^n x_j L(e_j) \cdot L(e_i) = \sum_{j=1}^n x_j \delta_{ji} = x_i$$

$$\text{Stąd } (L(x) - A(x)) \cdot L(e_i) = L(x) \cdot L(e_i) - A(x) \cdot L(e_i) = x_i - x_i = 0 \text{ dla } i = 1, \dots, n. \text{ Stąd } L(x) = A(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Stąd L jest liniowe i $L(x) \cdot L(y) = x \cdot y$ $L(x) = L \cdot x$ $L(x) \cdot L(y) = (Lx)^T \cdot Ly = x^T L^T \cdot L y = x^T \cdot y \Rightarrow L^T L = E_n$ ■