Krzywe na powierzchni.

S - powierzchnia regularna $p : D \to \mathbb{R}^3$ parametryzacja regularna S $\quad \gamma : I \to S \subset \mathbb{R}^3$ krzywa gładka na S

Stąd $\gamma(s) = p(u(s), v(s))$ dla pewnych funkcji gładkich $(u, v) : I \to D \subset \mathbb{R}^2$ krzywa gładka

$\gamma'(s) = p_u(u(s), v(s))\, u'(s) + p_v(u(s), v(s))\, v'(s) \qquad |\gamma'|^2 = \gamma' \cdot \gamma' = E(u')^2 + 2F u'v' + G(v')^2 = 1$

γ sparametryzowana łukowo $\qquad \gamma''(s) = k_g(s) + k_n(s) \qquad k_g(s) \in T_{\gamma(s)} S, \quad k_n(s) \perp T_{\gamma(s)} S$

Def.

$k_n(s)$ to wektor krzywizny normalnej $\gamma(s)$, a $k_g(s)$ to wektor krzywizny geodezyjnej $\gamma(s)$

$k_n(s) = (\gamma''(s) \cdot \nu(s))\, \nu(s) \qquad \varkappa_n(s) := \gamma''(s) \cdot \nu(s)$ to krzywizna normalna.

$\gamma'(s) \cdot \nu(s) = 0 \qquad \varkappa_n(s) = \gamma''(s) \cdot \nu(s) = -\gamma'(s) \cdot \nu'(s) = -(p_u u' + p_v v') \cdot (\nu_u u' + \nu_v \cdot v') =$

$= L(u')^2 + 2M u'v' + N(v')^2$

$\varkappa_n(s) = L(u')^2 + 2M u'v' + N(v')^2 \qquad \varkappa_n(s)$ jest zdeterminowany tylko przez kierunek wektora stycznego

bo $|\gamma'(s)|^2 = 1$

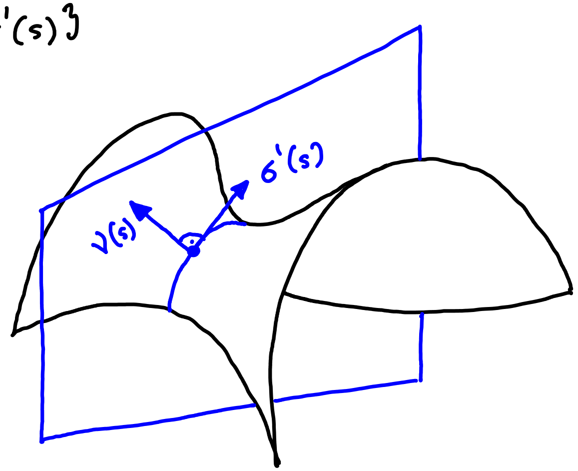
$P = \gamma(s) \qquad \Pi = P + \operatorname{span}\{\nu(s), \gamma'(s)\}$

$S \cap \Pi$ – cięcie normalne S w P

$S \cap \Pi$ – krzywa na Π (płaska)

$\sigma : I \to S \cap \Pi$

parametryzacja $S \cap \Pi$



Tw. $\varkappa_n(s_0)$ jest równa krzywiźnie cięcia normalnego jako krzywej płaskiej zorientowanej zgodnie z bazą $(\gamma'(s_0), \nu(s_0))$.

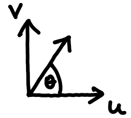
Dowód.: $\varkappa_n(s_0) = \gamma''(s_0)\cdot \nu(s_0)$, $\gamma'(s_0) = \sigma'(s_0)$ i $\varkappa_n(s_0)$ zależy tylko od kierunku $\gamma'(s_0)$ stąd

$\varkappa_n(s_0) = \sigma''(s_0)\cdot\nu(s_0)$ bo $\sigma : I \to S$ $\quad \sigma''(s_0) \perp \sigma'(s_0)$ bo $\sigma'(s)\cdot\sigma'(s) \equiv 1$

Stąd $\sigma''(s_0) \parallel \nu(s_0)$ $\quad \sigma''(s_0) = (\sigma''(s_0)\cdot\nu(s_0))\,\nu(s_0)$ $\quad (\sigma'(s_0), \nu(s_0))$ baza ortonorm.

ylo $\sigma''(s_0)\cdot\nu(s_0) = \varkappa_\sigma(s_0)$ – krzywizna σ w s_0. Stąd $\varkappa_n(s_0) = \varkappa_\sigma(s_0)$ ∎

Tw. $P = p(u_0, v_0) \in S$ $\quad (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ $\quad \beta = \alpha \operatorname{tg}\theta$



$$\varkappa_n = \frac{L\alpha^2 + 2M\alpha\beta + N\beta^2}{E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2} = \frac{L\cos^2\theta + 2M\cos\theta\sin\theta + N\sin^2\theta}{E\cos^2\theta + 2F\cos\theta\sin\theta + G\sin^2\theta}$$

Dowód.: $\gamma(s) = p(u(s), v(s))$ $\quad |\gamma'(s)|^2 = 1$ $\quad \gamma(0) = P$ $\quad (u'(0), v'(0)) = \rho(\cos\theta, \sin\theta)$, $\rho > 0$

$$\begin{cases} 1 = E(u'(0))^2 + 2F\,u'(0)\,v'(0) + G(v'(0))^2 = \rho^2(E\cos^2\theta + 2F\cos\theta\sin\theta + G\sin^2\theta) \\ \varkappa_n = L(u'(0))^2 + 2M\,u'(0)\,v'(0) + N(v'(0))^2 = \rho^2(L\cos^2\theta + 2M\cos\theta\sin\theta + N\sin^2\theta) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

Teza ∎

$$\lambda(\alpha,\beta) = \frac{L\alpha^2 + 2M\alpha\beta + N\beta^2}{E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2}$$

$(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 - \{0\}$ $\quad \lambda(\alpha,\beta)$ osiąga ekstrema $\Rightarrow \frac{\partial\lambda}{\partial\alpha} = \frac{\partial\lambda}{\partial\beta} = 0$

$$L\alpha^2 + 2M\alpha\beta + N\beta^2 - (E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2)\lambda = 0 \quad \Big/ \frac{\partial}{\partial\alpha} \quad \Big/ \frac{\partial}{\partial\beta}$$

$$(**)\ \begin{cases} (L - \lambda E)\alpha + (M - \lambda F)\beta = 0 \\ (M - \lambda F)\alpha + (N - \lambda G)\beta = 0 \end{cases}$$

$$(\alpha,\beta) \neq (0,0) \Rightarrow \det\begin{pmatrix} L-\lambda E & M-\lambda F \\ M-\lambda F & N-\lambda G \end{pmatrix} = 0$$

$$(EG-F^2)\lambda^2 + (EN+GL-2FM)\lambda + (LN-M^2) = 0 \quad (*)$$

λ_1, λ_2 - pierwiastki $(*)$ $\Rightarrow$ $\lambda_1+\lambda_2 = \dfrac{EN+GL-2FM}{EG-F^2} = 2H$ $\quad \lambda_1\lambda_2 = \dfrac{LN-M^2}{EG-F^2} = K$

$\lambda_1\ \lambda_2$ są wartościami własnymi $A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$ Stąd otrzymujemy

Tw. Max i min. krzywizny normalnej w P są równe krzywiznom głównym w P. Stąd ich iloczyn jest równy K i ich średnia jest równa H.

<u>Def.</u>

v_1, v_2 wektory własne A dla λ_1, λ_2 odpowiednio nazywamy kierunkami głównych krzywizn

$\alpha p_u + \beta p_v \in T_{p(u,v)}S$ leży na kierunku krzywizny głównej jeśli α, β spełnia $(**)$ czyli $(\alpha, \beta)^T$ jest wektorem własnym A.

Def. Punkt $P = p(u_0, v_0) \in S$ jest umbilikiem (pępkiem) jeśli w P $\lambda_1 = \lambda_2$.

Tw. P jest umbilikiem $\Leftrightarrow$ $H^2 - K = 0$

Dowód.: $4(H^2-K) = (\lambda_1+\lambda_2)^2 - 4\lambda_1\lambda_2 = (\lambda_1-\lambda_2)^2$ $\quad \lambda_1=\lambda_2 \Rightarrow H^2-K=0$

$$H^2 - K = 0 \Rightarrow (\lambda_1-\lambda_2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \ \blacksquare$$