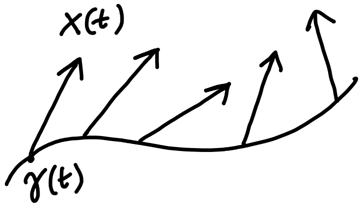
Geometria rozmaitości Riemanna – przesunięcie równoległe

M – rozmaitość gładka $\quad \nabla$ – koneksja na M

$\gamma : I \to M$ krzywa gładka $\quad I$ – przedział

Uwaga! jeśli I jest domknięty to $\gamma : I \to M$ jest gładka jeśli $\exists\, \tilde{I}$ przedział otwarty t, że $I \subset \tilde{I}$ oraz $\exists\, \tilde{\gamma} : \tilde{I} \to M$ gładka, t, że $\tilde{\gamma}|_I = \gamma$.

Pole wektorowe wzdłuż γ to przekształcenie $X : I \to TM$ t, że $\forall\, t \in I \quad X(t) \in T_{\gamma(t)} M$



(U, φ) mapa na $M \quad \gamma(t) \in U \quad X(t) = X^i(t)\, \partial_i|_{\gamma(t)}$

X jest gładkie jeśli X^i są funkcjami gładkimi dla $i = 1, \dots, n$

$\mathfrak{X}_\gamma(M)$ – zbiór gładkich pól wektorowych wzdłuż γ

$\mathfrak{X}_\gamma(M)$ – moduł nad pierścieniem $C^\infty(I)$

Jeżeli $X \in \mathfrak{X}(M)$ to $X \circ \gamma \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$

$\gamma : I \to M$ gł. $\quad X \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$ to $(\nabla_\gamma X)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_{\dot\gamma(t)} X$ (dobrze zdefiniowane bo $(\nabla_X Y)(p)$ zależy tylko od $X(p)$ oraz $Y \circ \gamma$ gdzie $\frac{d\gamma}{dt}\big|_0 = X(p)$)

$$(\nabla_\gamma X)^i(t_0) = \frac{dX^i}{dt}(t_0) + \Gamma^i_{jk}(\gamma(t_0))\, \frac{d\gamma^j}{dt}(t_0)\, X^k(t_0)$$

Stąd $\nabla_\gamma X \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$ czyli $\quad \nabla_\gamma : \mathfrak{X}_\gamma(M) \to \mathfrak{X}_\gamma(M)$ – pochodna kowariantna wzdłuż γ

Własności $\nabla_\gamma : \mathfrak{X}_\gamma(M) \longrightarrow \mathfrak{X}_\gamma(M)$

1) $\nabla_\gamma (X + aY) = \nabla_\gamma X + a\nabla_\gamma Y \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{X}_\gamma(M) \qquad \forall a \in \mathbb{R}$

2) $\nabla_\gamma (fX) = f\nabla_\gamma X + \frac{df}{dt} X \qquad \forall X \in \mathfrak{X}_\gamma(M) \qquad \forall f \in C^\infty(I)$

Przykład.: $M = \mathbb{R}^m$, $D_\gamma(X^i \partial_i)(t) = D_{\gamma'(t)} X^i(t)\, \partial_i|_{\gamma(t)} = \frac{dX^i}{dt}(t)\, \partial_i|_{\gamma(t)}$ gdzie $D_X Y = X^i(\partial_i Y^j)\partial_j$

Def

$X \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$ jest równoległe wzdłuż krzywej jeśli $\nabla_\gamma X = 0$

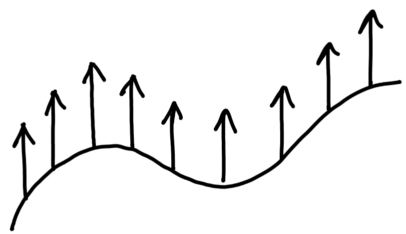
$$\nabla_\gamma X = 0 \iff \frac{dX^i}{dt} + (\Gamma^i_{jk} \circ \gamma)\frac{d\gamma^j}{dt} X^k = 0$$

Przykład. $M = \mathbb{R}^m$ $\quad \nabla_\gamma = D_\gamma \Rightarrow \Gamma^i_{jk} = 0 \quad \left(\Leftarrow \underset{\Gamma^i_{jk}\partial_i}{\underset{\parallel}{D_{\partial_j}\partial_k}} = 0 \right)$

$$D_\gamma X = 0 \iff \frac{dX^i}{dt} + 0\,\frac{d\gamma^j}{dt} X^k = \frac{dX^i}{dt} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$X^i = \text{const}$$

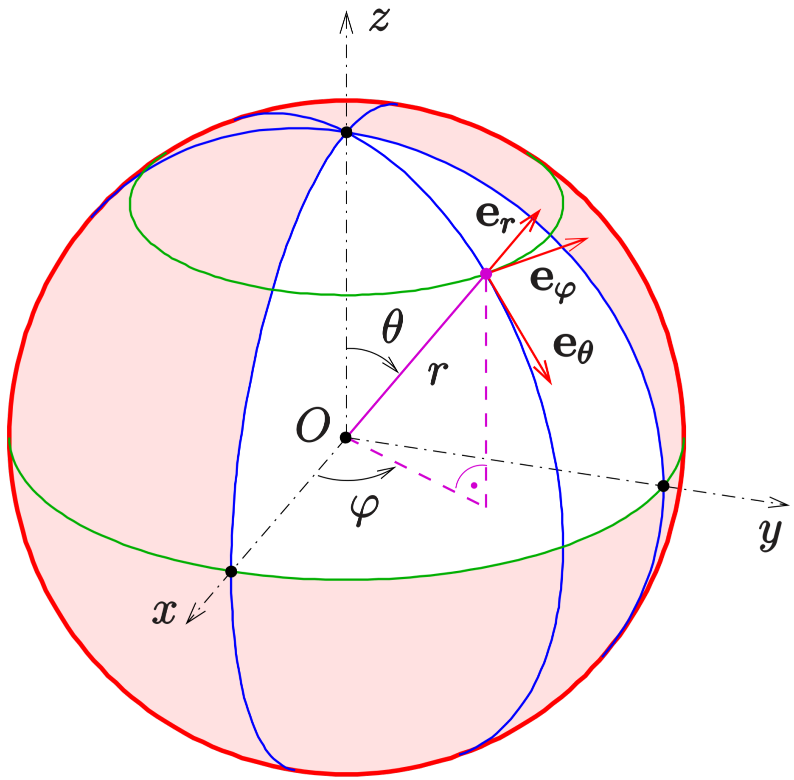


Przykład 2. $\quad S^2_r = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r \} \qquad N = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$

$V \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) \qquad x \in S^2 \qquad V_x \in T_x S^2 \iff V_x \cdot N_x = 0$

$V, W \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) \qquad \forall x \in S^2 \qquad V_x, W_x \in T_x S^2 \qquad \nabla_V W = D_V W - (D_V W \cdot N) N$

$\nabla_\gamma X = D_\gamma X - (D_\gamma X \cdot N) N = 0 \qquad D_\gamma X = \alpha \cdot N$



Autor obrazka Ag2gaeh (Wikipedia)

$$x_1 = r \sin\theta \cos\varphi$$

$$x_2 = r \sin\theta \sin\varphi$$

$$x_3 = r \cos\theta$$

$$e_\theta = \frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{\partial x_1}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial x_3} =$$

$$= r\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x_1} + r\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x_2} - r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x_3}$$

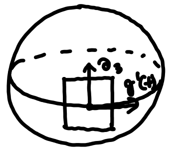
$$e_\varphi = \frac{\partial}{\partial\varphi} = \frac{\partial x_1}{\partial\varphi}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial\varphi}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial\varphi}\frac{\partial}{\partial x_3} =$$

$$= -r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial x_1} + r\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial x_2} =$$

$$= -x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_2}$$

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ – parametryzacja "równika"

$T_{\gamma(t)} S^2 = \operatorname{span}\{\gamma'(t), \partial_3\}$



$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0) \qquad \gamma'(t) = -\sin t\, \partial_1 + \cos t\, \partial_2 \qquad X(t) = f_1(t)\gamma'(t) + f_2(t)\partial_3$$
$$= f_1(t)(-\sin t\, \partial_1 + \cos t\, \partial_2) + f_2(t)\partial_3$$

$$D_\gamma X(t) = f_1'(t)(-\sin t\, \partial_1 + \cos t\, \partial_2) + f_1(t)(-\cos t\, \partial_1 - \sin t\, \partial_2) + f_2'(t)\partial_3$$

$$\underbrace{-f_1(t)(\cos \partial_1 + \sin t\, \partial_2)}_{= N_{\gamma(t)}}$$

$$D_\gamma X(t) = f_1'(t)\gamma'(t) + f_2'(t)\partial_3 = 0$$

$$f_1'(t) = 0 \qquad f_2'(t) = 0$$

$$f_1(t) = c_1 \qquad f_2'(t) \equiv c_2$$

$X = c_1 \gamma'(t) + c_2 \partial_3 \qquad c_1 = \text{const.} \qquad c_2 = \text{const.}$

↑

pole równoległe wzdłuż "równika"!

Tw. $\gamma : I \to M$ krzywa gładka

$\forall t_0 \in I \quad \forall X_0 \in T_{\gamma(t_0)} M \quad \exists! \, X \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$ t, że $X(t_0) = X_0$

Dowód.: Pole $X = X^i \partial_i$ w mapie (U, φ) spełnia równania liniowe

$$\frac{dX^i}{dt} + (\Gamma^i_{js} \circ \gamma) \frac{d\gamma^j}{dt} X^s = 0 \qquad \text{z warunkiem} \qquad X(t_0) = X_0$$

Z istnienia i jednoznaczności rozwiązania zag. Cauchy'ego wynika

teza twierdzenia w mapie (U, φ) (Następnie przedłużamy)

Dzięki Tw. możemy zdefiniować przesunięcie równoległe wzdłuż gładkiej krzywej

$\gamma : [a, b] \to M \qquad \gamma(a) = x \quad$ i $\quad \gamma(b) = y \qquad \tau_\gamma : T_x M \to T_y M$

$\tau_\gamma(v) = X(b)$, gdzie $X \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$ X równoległe wzdłuż γ i $X(a) = v$

τ_γ – przesunięcie równoległe wzdłuż γ

Tw. $\gamma : [a, b] \to M$ gładka $\gamma(a) = x \quad \gamma(b) = y$.

Wtedy $\tau_\gamma : T_x M \to T_y M$ jest izomorfizmem liniowym.

Niech $\bar{\gamma}(t) = \gamma(b - t + a) \qquad (\bar{\gamma}(a) = \gamma(b), \ \bar{\gamma}(b) = \gamma(a))$

$\tau_{\bar{\gamma}} : T_y M \to T_x M$ jest odwrotne do τ_γ.

τ_γ nie zależy od parametryzacji γ.

Dowód.: liniowość ∇_γ → liniowość τ_γ

$X \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$ pole równoległe wzdłuż γ $\Rightarrow$ $\tilde{X}(t) = X(b-t+a)$ $\quad \tilde{X} \in \mathfrak{X}_{\bar{\gamma}}(M)$ równoległe wzdłuż $\bar{\gamma}$

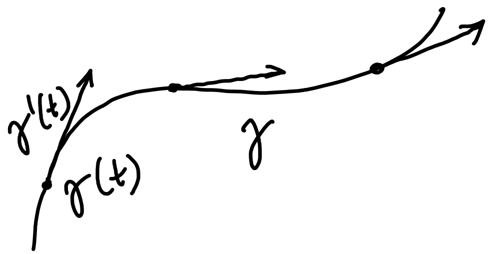
$\tilde{X}(a) = X(b)$ i $\tilde{X}(b) = X(a)$ $\Rightarrow$ $\tau_{\bar{\gamma}} \circ \tau_\gamma = id_{T_x M}$ $\quad \tau_\gamma \circ \tau_{\bar{\gamma}} = Id_{T_y M}$ $\Rightarrow$ $\tau_\gamma^{-1} = \tau_{\bar{\gamma}}$

$f : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ reparametryzacja

$$\frac{d(\gamma^i \circ f)}{dt} = \frac{d\gamma^i}{dt}(f(t)) \frac{df}{dt}(t)$$

$\nabla_\gamma X = 0 \quad \nabla_{\gamma \circ f}(X \circ f) = 0 \Rightarrow \tau_\gamma = \tau_{\gamma \circ f}$ ■

$$X(t) = \gamma'(t)$$



Def. Krzywa gładka $\gamma : I \to M$ jest geodezyjną jeśli $\gamma' \in \mathfrak{X}_\gamma(M)$ jest równoległe wzdłuż γ.

Tw. γ geodezyjna $\Leftrightarrow$ $\frac{d^2\gamma^i}{dt} + (\Gamma^i_{jk} \circ \gamma) \frac{d\gamma^j}{dt} \frac{d\gamma^k}{dt} = 0$

Tw. $\forall (x_0 \in M, v \in T_{x_0}M) \Rightarrow \exists! \gamma$ geodezyjna t, że $\gamma(0) = x_0$ i $\dot{\gamma}(0) = v$.

Dowód.: Z tw. o istn. i jednozn. rozw. $\frac{d^2\gamma^i}{dt^2} + (\Gamma^i_{jk} \circ \gamma) \frac{d\gamma^j}{dt} \frac{\partial \gamma^k}{dt} = 0 \quad \gamma(0) = x_0 \quad \dot{\gamma}(0) = v_0$

istnieje geodez. w otoczeniu x_0 spełniająca warunki początkowe.

Niech $\gamma_1, \gamma_2 : I \to M$ geodezyjne takie, że $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) \quad \dot{\gamma}_1(0) = \dot{\gamma}_2(0)$

Niech $t \in I$ t, że $\gamma_1(t) \neq \gamma_2(t)$ zał, że $\underline{t > 0}$

Niech $t_0 = \inf \{ s \in I \mid \gamma_1(s) \neq \gamma_2(s) \}$

$\{ s \in I \mid \gamma_1(s) \neq \gamma_2(s) \}$ jest otwarty $\Rightarrow$ $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$

rozważmy krzywe $\beta_1(s) = \gamma_1(t_0 + s)$ $\quad \beta_2(s) = \gamma_2(t_0+s)$ $\quad \beta_1(0) = \beta_2(0)$ $\quad \beta_1'(0) = \beta_2'(0)$

β_1, β_2 są geodezyjnymi (speł. $(*)$)

Zatem $\exists \varepsilon > 0 \; \forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon) \; \beta_1(s) = \beta_2(s)$. czyli $\gamma_1(t_0 + s) = \gamma_2(t_0 + s)$ dla $0 < s < \varepsilon$

Sprzeczne z def. t_0. ∎

Geodezyjne speł. te same war. początkowe pokrywają się na wspólnej części swoich dziedzin

$\exists (a, b)$ – maksymalny przedział na którym jest określona geodezyjna speł. $\gamma(0) = x_0$ $\quad \dot\gamma(0) = v$

∇ jest zupełna jeśli każdą geodezyjną można przedłużyć do geodezyjnej na przedziale $(-\infty, +\infty)$

Wniosek. $\gamma : (a, b) \to M$ geod. t, że $\exists t_0 \in (a, b)$ $\dot\gamma(t_0) \neq 0$

to $\forall t \in [a, b]$ $\dot\gamma(t) \neq 0$.

Dowód: przesunięcie równoległe jest izomorfizmem $\Rightarrow \tau_\gamma(\gamma'(t_0)) \neq 0$ dla $\gamma'(t_0) \neq 0$

$$\tau_\gamma(\gamma'(t_0)) = \gamma'(t)$$

$$\tau_\gamma : T_{\gamma(t_0)} M \to T_{\gamma(t)} M$$

Tw. zał. $\gamma:(a,b)\to M$ geodezyjna t, że $\dot\gamma(t)\neq 0$, $\psi:(\tilde a,\tilde b)\to(a,b)$ dyfeom.

Teza $\gamma\circ\psi$ jest geodezyjną $\iff \exists\, \alpha\neq 0,\ \beta\in\mathbb{R}\quad \psi(t)\equiv\alpha t+\beta$

Dowód.: γ geod. $\iff \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma\equiv 0$ Niech $\tilde\gamma=\gamma\circ\psi$ $\quad \dot{\tilde\gamma}(t)=\psi'(t)\,\dot\gamma(\psi(t))$

$$0=\nabla_{\dot{\tilde\gamma}}\dot{\tilde\gamma}=\nabla_{\dot{\tilde\gamma}\circ\psi}\left(\frac{d\psi}{dt}\,\dot\gamma\circ\psi\right)=\frac{d^2\psi}{dt^2}(\dot\gamma\circ\psi)+\frac{d\psi}{dt}\Big((\underbrace{\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma}_{=0})\circ\psi\Big)=\frac{d^2\psi}{dt^2}(\dot\gamma\circ\psi)=0\iff$$

$$\iff\frac{d^2\psi}{dt^2}\equiv 0\iff\psi(t)=\alpha t+\beta$$

ψ – dyfeo. $\Downarrow$ $\alpha\neq 0$ ■

Tw. Jeżeli γ geod. speł. $\gamma(0)=x_0$ $\dot\gamma(0)=v$ $\Rightarrow \forall\, s\in\mathbb{R}$ $\tilde\gamma(t)=\gamma(st)$ geod. speł. war. $\tilde\gamma(0)=x_0$ $\dot{\tilde\gamma}(0)=sv$

Dowód. $\tilde\gamma$ geod. z pop. tw. $\quad\tilde\gamma(0)=\gamma(s\cdot 0)=\gamma(0)=x_0$ $\quad \dot{\tilde\gamma}(t)=\frac{d}{dt}(\gamma(st))=s\dot\gamma(st)$

$\dot{\tilde\gamma}(0)=s\dot\gamma(0)=sv$

Tw. zał. Konekcja ∇ na M $\Rightarrow$ Istnieje $\tilde\nabla$ na M t, że $\tilde T\equiv 0$ i γ jest geod. $\nabla\iff\gamma$ jest geod. $\tilde\nabla$.

Dowód.: $\tilde\nabla_X Y=\frac{1}{2}(\nabla_X Y+\nabla_Y X+[X,Y])$ sprawdzenie bezpośrednie

$\Downarrow$

$$\tilde\Gamma^i_{jk}=\frac{1}{2}\left(\Gamma^i_{jk}+\Gamma^i_{kj}\right)$$ – podstawić do równań geod.