Geometria rozmaitości Riemanna – przykłady

Przestrzeń płaska $M = \mathbb{R}^n$ mapa $id_{\mathbb{R}^n}(x) = x$ $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ $i = 1, \dots, n$ $g_{ij} = \partial_i \cdot \partial_j = \delta_{ij}$

$$\Gamma^i_{js} = \frac{1}{2} g^{ip}(\partial_j g_{sp} + \partial_s g_{jp} - \partial_p g_{js}) \qquad \partial_i g_{jk} = 0 \qquad \Gamma^i_{js} = 0$$

$\uparrow$

symbole Christoffela koneksji L-C

Równanie geodezyjnych $\frac{d^2\gamma^i}{dt^2} + (\Gamma^i_{js} \circ \gamma)\frac{d\gamma^j}{dt}\frac{d\gamma^s}{dt} = 0$

z $\Gamma^i_{js} \equiv 0 \Rightarrow \frac{d^2\gamma^i}{dt^2} = 0$ $\gamma(t) = x_0 + tv$ geodezyjne to proste

$\gamma(0) = x_0$

$\frac{d\gamma}{dt}(0) = v$

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

$$R(\partial_j, \partial_k)\partial_s = R^i_{sjk}\,\partial_i \qquad R^i_{sjk} = \partial_j \Gamma^i_{ks} - \partial_k \Gamma^i_{js} + \Gamma^p_{ks}\Gamma^i_{jp} - \Gamma^p_{js}\Gamma^i_{kp}$$

$\Gamma^i_{js} \equiv 0 \Rightarrow R^i_{sjk} \equiv 0$ $R \equiv 0$ i $T \equiv 0$ przykład przestrzeni płaskiej

koneksja riemannowska płaska

Przykład 2. (półpłaszczyzna Poincarégo)

$M = \mathbb{R} \times (0, \infty)$ $\quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ $\quad g_{ij} = \frac{1}{x_2^2}\delta_{ij}$ $\quad g^{ij} = x_2^2 \delta_{ij}$

$\partial_1 g_{ij} = 0 \qquad \partial_2 g_{ij} = -\frac{2}{x_2^3}\delta_{ij}$

$\Gamma^1_{11} = 0 \quad \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -\frac{1}{x_2} \quad \Gamma^1_{22} = 0 \quad \Gamma^2_{11} = \frac{1}{x_2} \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = 0 \quad \Gamma^2_{22} = -\frac{1}{x_2}$

$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\gamma_1}{dt^2} = \dfrac{2}{\gamma_2}\dfrac{d\gamma_1}{dt}\dfrac{d\gamma_2}{dt} \\ \dfrac{d^2\gamma_2}{dt^2} = \dfrac{1}{\gamma_2}\left(\left(\dfrac{d\gamma_2}{dt}\right)^2 - \left(\dfrac{d\gamma_1}{dt}\right)^2\right) \end{cases}$$

$\gamma_1 \equiv x_{01} \qquad \frac{d\gamma_1}{dt} = \frac{d^2\gamma_1}{dt^2} = 0 \qquad \frac{d^2\gamma_2}{dt^2} = \frac{1}{\gamma_2}\left(\frac{d\gamma_2}{dt}\right)^2 \qquad \frac{\frac{d^2\gamma_2}{dt^2}}{\frac{d\gamma_2}{dt}} = \frac{\frac{d\gamma_2}{dt}}{\gamma_2}$

$\frac{d}{dt}\left(\ln \frac{d\gamma_2}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(\ln \gamma_2) \qquad \frac{d}{dt}\left(\ln\left(\frac{\frac{d\gamma_2}{dt}}{\gamma_2}\right)\right) = 0 \qquad \frac{\frac{d\gamma_2}{dt}}{\gamma_2} = c$

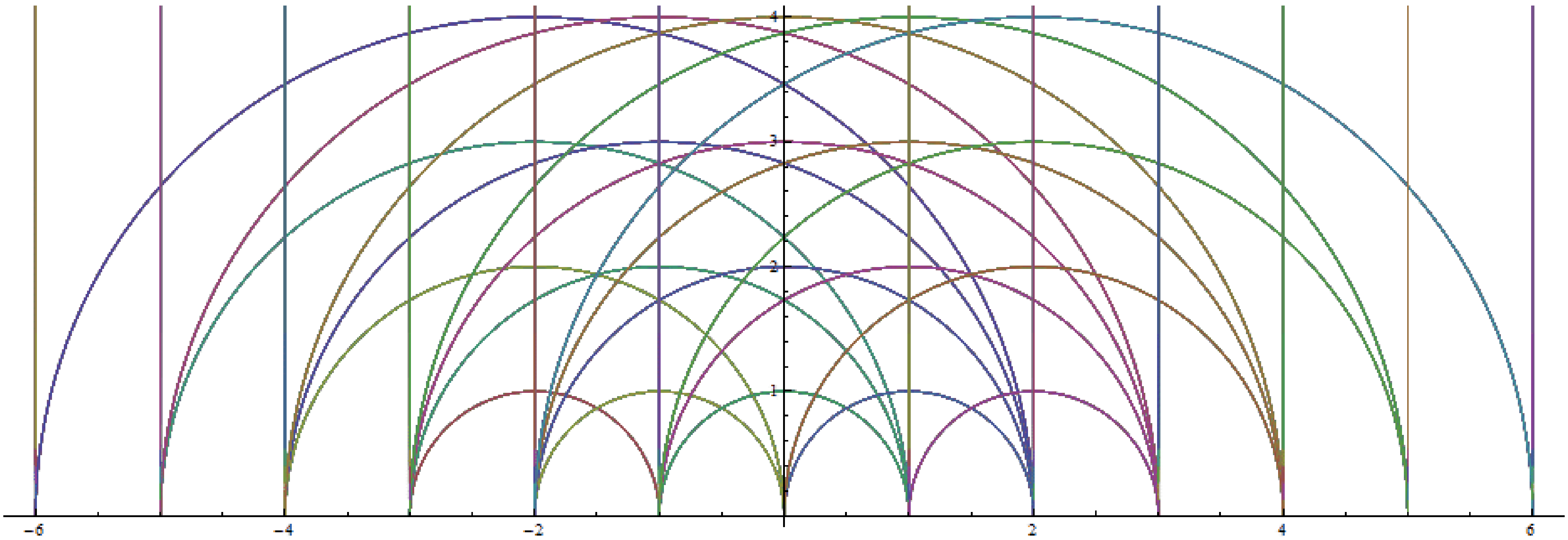
$\frac{d\gamma_2}{\gamma_2} = c\,t \qquad \gamma_2(t) = De^{ct}$

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = x_{01} \\ \gamma_2(t) = x_{02}e^{At} \end{cases}$$

Druga grupa geodezyjnych $\gamma_1(t) = x_{01} + r\,\mathrm{tgh}(at+b)$ $\quad a \neq 0 \quad b, x_{01} \in \mathbb{R} \quad r > 0$

$$\gamma_2(t) = \frac{r}{\cosh(at+b)} \qquad t \in \mathbb{R}$$

geometria nieeuklidesowa.



Podrozmaitość Riemanna

$M, \tilde{M}$ rozm. gładkie $(\tilde{M}, \tilde{g})$ - rozm. Riemanna $f: M \to \tilde{M}$ immersja (M jest podrozm. $\tilde{M}$)

$g_x(u,v) \overset{def}{:=} (f^* \tilde{g})_x (u,v) = \tilde{g}(d_x f(u), d_x f(v))$ g jest polem tensorowym symetrycznym typu $(0,2)$

$g_x(u,u) = \tilde{g}(df_x(u), df_x(v)) \geq 0$ i $g_x(u,u) = 0 \Leftrightarrow \tilde{g}(d_x f(u), d_x f(u)) = 0$ $d_x f(u) = 0$ i f immer.

$\Leftrightarrow u = 0$

g jest tensorem metrycznym.

Przykład. Metryka produktowa

(M_1, g_1) i (M_2, g_2) rozm. rieman. $M = M_1 \times M_2$ $v \in T_x M = T_{(x_1,x_2)}(M_1 \times M_2) \cong T_{x_1} M_1 \oplus T_{x_2} M_2$ $v = v_1 + v_2$

$v_i \in T_{x_i} M_i$ dla $i = 1,2$

$g(u,v) = g_1(u_1, v_1) + g_2(u_2, v_2)$

(U_i, φ_i) - mapa na $M_i \Rightarrow (U_1 \times U_2, \varphi_1 \times \varphi_2)$ - mapa na $M = M_1 \times M_2$

$$(g_{ij})_{i,j=1,\dots,m_1+m_2}(x_1,x_2) = \left(\begin{array}{c|c} \left(g^1_{ij}(x_1)\right)_{i,j=1,\dots,m_1} & 0 \\ \hline 0 & \left(g^2_{i-m_1, j-m_1}(x_2)\right)_{i,j=m_1+1,\dots,m_1+m_2} \end{array}\right)$$

$$\Gamma^k_{ij}(x_1,x_2) = \begin{cases} \overset{1}{\Gamma}{}^k_{ij}(x_1) & i,j,k = 1,\dots,m_1 \\ \overset{2}{\Gamma}{}^{k-m_1}_{i-m_1,j-m_1}(x_2) & i,j,k = m_1+1,\dots,m_1+m_2 \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

$$R^i_{jkl}(x_1,x_2) = \begin{cases} \overset{1}{R}{}^i_{jkl}(x_1) & i,j,k,l = 1,\dots,m_1 \\ \overset{2}{R}{}^{i-m_1}_{j-m_1,k-m_1,l-m_1} & \text{dla } i,j,k,l = m_1+1,\dots,m_1+m_2 \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Wniosek. (M_1,g_1), (M_2,g_2) - płaskie $\Rightarrow$ $(M_1\times M_2, g)$ - płaska

Wniosek. $T^n = S^1(r_1)\times\dots\times S^1(r_n)$ z metryką produktową jest płaski

Tw. (M,g) - rozm. Riem. $\tau_\gamma : T_{\gamma(a)}M \to T_{\gamma(b)}M$ przesunięcie równoległe wzdłuż $\gamma:[a,b]\to M$ krzywej gładkiej, jest izometrią tzn. $g_{\gamma(b)}(\tau_\gamma(u), \tau_\gamma(v)) = g_{\gamma(a)}(u,v)$ $\forall u,v\in T_{\gamma(a)}M$

Dowód.: $u,w\in T_{\gamma(a)}M$ $\quad X,Y\in \mathfrak{X}_\gamma(M)$ $\quad X(a)=u$ $\quad Y(a)=v$ $\quad \nabla_\gamma X = \nabla_\gamma Y = 0$

$$\frac{d}{dt}g(X(t),Y(t)) = \underbrace{(\nabla_{\dot\gamma(t)} g)}_{=0}(X(t),Y(t)) + g(\underbrace{\nabla_\gamma X}_{=0}(t), Y(t)) + g(X(t), \underbrace{\nabla_\gamma Y}_{=0}(t)) = 0$$

$$g(X(t),Y(t)) = g(X(a),Y(a)) = g(u,v)$$

$$\| $$

$$g(X(t),Y(t)) = g(X(b),Y(b)) = g(\tau_\gamma(u), \tau_\gamma(v))$$

$g(u, v) = g(\alpha_g(u), \alpha_g(v))$

Wniosek. Jeżeli γ jest geod. na (M, g) - rozm. R. to $\|\dot{\gamma}(t)\| = \left(g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))\right)^{\frac{1}{2}} = \text{const}$.

Jeżeli dodatkowo $\|\dot{\gamma}(t_0)\| = 1 \Longrightarrow \gamma$ jest sparam. łukowo czyli $\forall t \; \|\dot{\gamma}(t)\| = 1$

oraz $d(\gamma|_{[t_1, t_2]}) = t_2 - t_1$.