Wojciech Domitrz Geometria Rozmaitości Riemanna. Tensor metryczny

$t : \mathfrak{X}(M) \times \ldots \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ pole tensorowe typu $(0,k)$

$X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ $t(X_1,\ldots,X_k) = t(X_1^i \partial_i, \ldots, X_k^i \partial_i) = X_1^{i_1} X_2^{i_2} \ldots X_k^{i_k}\, t(\partial_{i_1}, \partial_{i_2}, \ldots, \partial_{i_k}) =$

$= t_{i_1,\ldots,i_k} X_1^{i_1} X_2^{i_2} \ldots X_k^{i_k}$

$$Y(t(X_1,\ldots,X_k)) = Y(t_{i_1,\ldots,i_k}) X_1^{i_1} X_2^{i_2} \ldots X_k^{i_k} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{k} t_{i_1,\ldots,i_k} X_1^{i_1} \ldots X_{s-1}^{i_{s-1}} Y(X_s^{i_s}) X_{s+1}^{i_{s+1}} \ldots X_k^{i_k} =$$

$$Y(t_{i_1,\ldots,i_k}) X_1^{i_1} X_2^{i_2} \ldots X_k^{i_k} +$$

$$\nabla_Y X_s = \nabla_Y (X_s^l \partial_l) = Y(X_s^l)\partial_l$$

$$+ \sum_{s=1}^{k} t(X_1,\ldots,X_{s-1}, \nabla_Y X_s, X_{s+1},\ldots,X_k)$$

$$(\nabla_Y t)(X_1,\ldots,X_k) = Y(t_{i_1,\ldots,i_k}) X_1^{i_1} X_2^{i_2} \ldots\ldots X_k^{i_k}$$

Stąd pochodną kowariantną w kier. pola Y pola tensorowego t nazywamy

$$\nabla_Y t(X_1,\ldots,X_k) \overset{def.}{=} Y(t(X_1,\ldots,X_k)) - \sum_{s=1}^{k} t(X_1,\ldots,X_{s-1}, \nabla_Y X_s, X_{s+1},\ldots,X_k)$$

$\forall Y \in \mathfrak{X}(M)$ $\nabla_Y t$ zdef. powyżej jest polem tensorowym typu $(0,k)$

sprawdzić ()

$$\nabla t(Y, X_1, \dots, X_k) \overset{def}{=} \nabla_Y t(X_1, \dots, X_k)$$

∇t jest polem tensorowym typu $(0, k+1)$

Analogicznie jeśli $t: \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ jest polem tensorowym typu $(1, k)$ to pochodną kowariantną w kierunku pola Y pola tens.

def $$(\nabla_Y t)(X_1, \dots, X_k) \overset{def}{=} \nabla_Y \left(t(X_1, \dots, X_k)\right) - \sum_{s=1}^{k} t(X_1, \dots, X_{s-1}, \nabla_Y X_s, X_{s+1}, \dots, X_k)$$

jest polem tensorowym typu $(1, k)$

$$\nabla t(Y, X_1, \dots, X_k) \overset{def}{=} (\nabla_Y t)(X_1, \dots, X_k)$$

∇t jest polem tensorowym typu $(1, k+1)$

$$\text{cykl } f(x, y, z) \overset{def}{=} \frac{1}{3}\left(f(x, y, z) + f(y, z, x) + f(z, x, y)\right)$$

Tw. (tożsamości Bianchiego)

zał. ∇ – koneksja na M, T – tensor torsji, R – tensor krzywizny.

Teza $\quad$ cykl $R(X,Y)Z =$ cykl $\left(T(T(X,Y),Z) + \nabla_X T(Y,Z)\right)$ $\quad$ cykl $\left((\nabla_X R)(Y,Z) + R(T(X,Y),Z)\right) = 0$

$T = 0 \Rightarrow$ cykl $\left(R(X,Y)Z\right) = 0$ $\quad$ cykl $\left((\nabla_X R)(Y,Z)\right) = 0$

M – gł. rozm. $\dim M = m$

Def. – Tensorem metrycznym na M lub tensorem Riemanna nazywamy tensor g typu $(0,2)$ symetryczny i dodatnio określony tzn. $\forall\, X \in \mathfrak{X}(M)$ $g(X,X) \geq 0$ i $g(X,X) = 0 \iff X = 0$

Stąd $\forall\, x \in M$ $g_x : T_x M \times T_x M \to \mathbb{R}$ jest iloczynem skalarnym na $T_x M$

Tensor metryczny g na M $\forall\, x \in M$ definiuje izomorfizm $i_g : T_x M \to T_x^* M$ wzorem

$i_g(v) = g(v, \cdot) \in (T_x^* M)$ tzn. $i_g(v)(w) = g(v,w)$

$i_g(v) = 0 \in T_x^* M$ tzn $i_g(v)(w) \equiv 0$ $g(v,w) \equiv 0$ $\forall\, w \in T_x M$ $g(v,v) = 0 \Rightarrow v = 0$

$i_g(v) = 0 \Rightarrow v = 0$ $\dim T_x M = \dim T_x^* M \Rightarrow i_g$ izomorfizm

$i_g : \mathfrak{X}(M) \to \Omega^1(M)$ $i_g(X) = g(X, \cdot)$

Def. Tensor symetryczny typu $(0,2)$ nazywamy pseudometrycznym lub pseudoriemannowskim jeżeli i_g jest izomorfizmem

g – tensor metryczny na M to (M,g) – rozm. metryczne lub rozm. riemannowskie

g – tensor pseudometryczny na M to (M,g) rozm. pseudometryczne lub rozm. pseudoriemannowskie

(M,g) – przestrzeń Riemanna

Przykład 1. $(\mathbb{R}^m, \bullet)$ $\qquad \partial_1, \dots, \partial_m \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^m)$

$X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^m) \qquad X = X^i \partial_i \qquad Y = Y^j \partial_j \qquad X \bullet Y = X^i Y^i$

$X \bullet Y = Y \bullet X \qquad (X + fY) \bullet Z = X \bullet Z + f\, Y \bullet Z \quad \forall\, X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^m) \quad \forall\, f \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$

$X \bullet X = \sum_{i=1}^m X_i^2 \geqslant 0 \qquad X \bullet X = 0 \Leftrightarrow \forall\, i = 1, \dots, m \quad X_i = 0$

$(\mathbb{R}^m, \bullet)$ – rozmaitość Riemanna

Przykład 2. $\qquad S^2 \subset \mathbb{R}^3 \qquad \bullet : \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) \to C^\infty(\mathbb{R}^3)$

$$g = \bullet|_{\mathfrak{X}(S^2) \times \mathfrak{X}(S^2)} : \mathfrak{X}(S^2) \times \mathfrak{X}(S^2) \to C^\infty(S^2)$$

$X, Y \in \mathfrak{X}(S^2) \qquad p \in S^2 \qquad g_p(X(p), Y(p)) = X(p) \cdot Y(p) \qquad X(p) \in T_p S^2 \subset T_p \mathbb{R}^3$

$Y(p) \in T_p S^2 \subset T_p \mathbb{R}^3$

Przykład 3. $\qquad M \subset \mathbb{R}^m$ podrozm. gładka

$X, Y \in \mathfrak{X}(M) \qquad g_p(X(p), Y(p)) = X(p) \bullet Y(p)$

Tw. M jest rozmaitością parazwartą to istnieje tensor metryczny na M

Dowód.: M jest parazwarta jeśli w każde pokrycie otwarte $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ rozm. M $\left(\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha = M \quad U_\alpha \text{- otwarte} \right)$ można wpisać pokrycie lokalnie skończone (tzn $\{V_\beta\}_{\beta\in B}$ $\bigcup_{\beta\in B} V_\beta = M$ V_β - otwarte $\forall \beta\in B\ \exists \alpha\in A\ V_\beta \subset U_\alpha$ oraz $\forall x\in M\ \exists U \ni x$ otwarty t, że $\#\{\beta\in B \mid U_x \cap V_\beta \neq \emptyset\} < +\infty$

Tw (rozkład jedności) M - parazwarta rozmaitość gładka $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ otwarte pokrycie M

Wtedy istnieje $\{\lambda_\beta\}_{\beta\in B}$ rodzina nieujemnych funkcji C^∞ gładkich na M takich, że 1) $\{\operatorname{supp} \lambda_\beta\}_{\beta\in B}$ jest lokalnie skończonym pokryciem wpisanym w $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ oraz 2) $\sum_{\beta\in B} \lambda_\beta \equiv 1$

Uwaga. z 1) wynika, że $\forall x\in M$ $\sum_{\beta\in B} \lambda_\beta(x)$ składa się tylko ze skończonej liczby składników niezerowych $\forall x\in M$ $\sum_{\beta\in B} \lambda_\beta(x) = 1$. Stąd $\{\lambda_\beta\}_{\beta\in B}$ nazywamy rozkładem jedności skojarzonym z $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$

$(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$ - atlas na M - parazwarta $\Rightarrow$ $\{V_\beta\}_{\beta\in B}$ pokrycie otwarte w M lokalnie skończone wpisane w $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ $\Big(V_\beta, \underbrace{\varphi_\alpha|_{V_\beta}}_{=\varphi_\beta}\Big)_{\beta\in B}$ - atlas lok. skończony

$\partial_1^{(\beta)}, \dots, \partial_m^{(\beta)}$ - kanon. reper skojarzony z mapą (V_β, φ_β) $\quad V_\beta \subset U_\alpha$

na V_β określamy tensor metryczny g_β tak, aby $\partial_1^{(\beta)}, \dots, \partial_m^{(\beta)}$ był ortonormal. wzgl. g_β czyli $X, Y \in \mathfrak{X}(V_\beta)$ $g_\beta(X,Y) = \sum_{i=1}^m X^i_\beta Y^i_\beta$ gdzie

$$X = X^i_\beta \partial_i^{(\beta)}$$
$$Y = Y^i_\beta \partial_i^{(\beta)}$$

Niech $\{\lambda_\beta\}_{\beta\in B}$ rozkł. jedności skojarzony z $\{V_\beta\}_{\beta\in B}$

$$(\tilde g_\beta)_x = \begin{cases} \lambda_\beta(x)(g_\beta)_x & x\in V_\beta \\ 0 & x\notin \operatorname{supp}\lambda_\beta \end{cases}$$

$g = \sum_{\beta\in B} \tilde g_\beta$ $\qquad$ g jest tensorem metrycznym na M

$x\in M$ $\quad$ Wtedy $\exists\, U\ni x$ otwarty t, że $\#\{\beta\in B \mid U\cap V_\beta\neq\emptyset\} < +\infty$. Stąd

$g|_U = \sum_{i=1}^{k} \tilde g_{\alpha_i}|_U$ $\quad$ Stąd wynika, że g jest polem tensorowym klasy C^∞

symetrycznym typu $(0,2)$ oraz $g(X,X)\geq 0$ $\forall X\in\mathfrak{X}(M)$

zał, że $g(X,X)=0 \Rightarrow \tilde g_\beta(X,X)=0$ (bo $\tilde g_\beta(X,X)\geq 0$ $\forall \beta\in B$)

$\sum_{\beta\in B}\lambda_\beta(x)\equiv 1$ stąd $\forall x\in X$ $\exists\,\beta\in B$ $\lambda_\beta(x)\neq 0 \Rightarrow (\tilde g_\beta)_x\neq 0 \Rightarrow (g_\beta)(X_x,X_x)=0 \Leftrightarrow X_x=0$ ∎

$(\tilde g_\beta)_x$ dodat. określony

(M, g) rozm. riemannowska

$v \in T_x M$ $\quad \|v\| = (g(v,v))^{\frac{1}{2}}$ $\quad \gamma : [a,b] \to M$ gładka krzywa $\quad$ długość krzywej

określony $\quad d(\gamma) = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\| \, dt$

$d(\gamma)$ nie zależy od parametryzacji

parametryzacja łukowa $\quad \|\dot\gamma(s)\| \equiv 1 \qquad s(s) = \int_a^s \|\gamma'(t)\| \, dt$

$\gamma : [a,b] \to M$ jest kawałkami gładka jeżeli γ jest ciągła oraz $\exists \ a = t_0 < \ldots < t_{k-1} < t_k = b$

t, że $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ jest gładka dla $i = 1, \ldots, k$

$d(\gamma) = \sum_{i=1}^{k} d(\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]})$)

zał, że M jest spójna

Funkcja $d(x,y) = \inf \{ d(\gamma) \mid \gamma : [a,b] \longrightarrow M$ kawałkami gładka $\gamma(a) = x, \ \gamma(b) = y \}$

definiuje metrykę na M

1) $d(x,y) \geq 0$ $\qquad$ 2) $d(x,y) = d(y,x)$ $\qquad$ 3) $d(x,y) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Własności 1–3 są oczywiste

Trudne do dowodu $\quad d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

$\Leftrightarrow \left(x \neq y \Rightarrow d(x,y) > 0 \right)$

Tw. (Levi-Civita)

(M, g) rozm. riemannowska

Wtedy $\exists ! \nabla$ - koneksję t, że $T = 0$ i $\nabla g = 0$ (beztorsyjna i zgodna z metryką (metryczna))

Dowód.: (1) $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0$ (2) $X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$

$(T(X,Y) = 0)$ $(\nabla_X g(Y,Z) = 0)$

zał, że ∇ speł. (1) i (2) istnieje. Wtedy

$$X(g(Y,Z)) + Y(g(X,Z)) - Z(g(X,Y)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(\nabla_X Z, Y) + g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Y Z, X)$$
$$- g(\nabla_Z X, Y) - g(\nabla_Z Y, X) =$$

$$= g(\nabla_X Y + \nabla_Y X, Z) + g(\nabla_X Z - \nabla_Z X, Y) + g(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y, X)$$

$$= g(2\nabla_X Y - [X,Y], Z) + g([X,Z], Y) + g([Y,Z], X)$$

$$(**)\ g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}\Big(X(g(Y,Z)) + Y(g(X,Z)) - Z g(X,Y) +$$
$$g([X,Y],Z) + g([Z,X],Y) + g([Z,Y],X)\Big)$$

$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

wtedy $\alpha(Z) = \frac{1}{2}\big(X g(Y,Z) + Y(g(X,Z)) - Z g(X,Y) + g([X,Y],Z) + g([Z,X],Y)$

$+ g([Z,Y],X)\big)$ jest 1-formą. czyli $\alpha : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$

$C^\infty(M)$ - liniowym przekształceniem

$$\alpha(fZ) = \tfrac{1}{2}\Big(X(f\, g(Y,Z)) + Y(f\, g(X,Z)) - fZ(g(X,Y)) +$$
$$+ fg([X,Y],Z) + g(f[Z,X] - X(f)Z, Y) + g(f[Z,Y] - Y(f)Z, X)\Big) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\Big(X(f)\, g(Y,Z) + f\, X(g(Y,Z)) + Y(f)\, g(X,Z) + f\, Y(g(X,Z)) - f Z g(X,Y)$$
$$+ f\, g([X,Y],Z) + f\, g([Z,X],Y) - X(f)\, g(Z,Y) + f\, g([Z,Y],X) -$$
$$- Y(f)\, g(Z,X) = f\, \alpha(Z)$$

$\alpha(Z_1 + Z_2) = \alpha(Z_1) + \alpha(Z_2)$ oczywiste

(*) $g(V, Z) = \alpha(Z)$ i g niezdeg $\Rightarrow \exists!\, V \in \mathfrak{X}(M)$

spełn. (*)

$D_X Y \overset{def}{=} V$ czyli $g(D_X Y, Z) = \alpha(Z)$ czyli $D_X Y$ jednoznacznie wyznaczone

wzorem (**)

sprawdźmy czy $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dane wzorem (**) jest

koneksją liniową.

tw. a) $g(\nabla_{\lambda X+\eta\tilde{X}} Y - \lambda \nabla_X Y - \eta \nabla_{\tilde{X}} Y, Z) = 0$ $\qquad X, \tilde{X}, Y, \tilde{Y}, Z \in \mathfrak{X}(M)$

b) $g(\nabla_X (Y+\tilde{Y}) - \nabla_X Y - \nabla_X \tilde{Y}, Z) = 0$ $\qquad \lambda, \eta \in C^\infty(M)$

c) $g(\nabla_X (\lambda Y) - \lambda \nabla_X Y - X(\lambda) Y, Z) = 0$

Odwzorowanie

$$(X,Y,Z) \mapsto \frac{1}{2}\Big(X(g(Y,Z)) + Y(g(X,Z)) - Z(g(X,Y)) + g([X,Y],Z) + g([Z,X],Y) + g([Z,Y],X)\Big)$$

1) jest addytywne ze względu na X, Y, Z $\Rightarrow$ stąd b)

więc pozostaje do sprawdzenia

$$g(\nabla_{\lambda X} Y, Z) = \frac{1}{2}\Big(\lambda X(g(Y,Z)) + Y(\lambda g(X,Z)) -$$

$$- Z(\lambda g(X,Y)) + g[\lambda [X,Y] - Y(\lambda) X, Z) +$$

$$+ g(f[Z,X] + Z(f) X, Y) + f g([Z,Y], X) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\Big(\lambda X(g(Y,Z)) + \cancel{Y(\lambda)\, g(X,Z)} + \lambda Y(g(X,Z)) - \cancel{Z(\lambda)\, g(Y,Z)}$$

$$+ \lambda\, g([X,Y],Z) - \cancel{Y(\lambda)\, g(X,Z)}$$

$$+ \lambda\, g([Z,X],Y) + \cancel{Z(f)\, g(X,Y)}$$

$$+ f\, g([Z,Y],X)\Big) = \big(\lambda\, g(\nabla_X Y, Z)\big) =$$

$$= \big(g(\lambda \nabla_X Y, Z)\big)$$

Analogicznie odpowiednio:

$$g(\nabla_X(\lambda Y), Z) = g(\lambda \nabla_X Y + X(\lambda) Y, Z)$$

$$g(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]) = 0$$

$$X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(\nabla_X Z, Y) \quad \blacksquare$$

Koneksję bez torsji zgodną z tensorem metrycznym to koneksja Riemanna lub koneksję Levi-Civita. W dowodzie korzysta się tylko z tego że $i_g : \mathfrak{X}(M) \ni X \mapsto g(X, \cdot) \in \Omega^1(M)$ jest izomorfizmem.

Stąd powyższe twierdzenie zachodzi też dla rozmaitości pseudoriemannowskich

Wniosek. ∇ - koneksja Riemanna to $\forall\, X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

$$g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2}\Big(X\, g(Y, Z) + Y(g(X,Z)) - Z(g(X,Y)) + g([X,Y], Z) + g([Z,X], Y) + g([Z,Y], X)\Big)$$

Wniosek.: Symbole Γ^i_{js} dla kon. Riem. to

$$\Gamma^i_{js} = \frac{1}{2} g^{ip} \left(\partial_j g_{sp} + \partial_s g_{jp} - \partial_p g_{js} \right)$$