

## Geometria Rozmaitości Riemannowskich

### Wydział MiNI PW

#### Zestaw zadań 1.

**Zad. 1.** Niech  $D$  będzie podzbiorem otwartym  $\mathbb{R}^n$  oraz  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  będzie przekształceniem klasy  $C^r$ , gdzie  $r \in \mathbb{N}$ ,  $r = \infty$  albo  $r = \omega$ . Pokazać, że wykres  $F$  czyli zbiór

$$\text{graph} F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m | x \in D, y = f(x)\}$$

jest rozmaitością różniczkową klasy  $C^r$ . Jaki jest wymiar  $\text{graph} F$ ? Czy  $\text{graph} F$  jest orientowalna?

**Zad. 2.** Niech  $D$  będzie podzbiorem otwartym  $\mathbb{R}^n$  oraz  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  będzie przekształceniem klasy  $C^r$ , gdzie  $r \in \mathbb{N}$  lub  $r = \infty$ . Punkt  $x \in D$  jest punktem krytycznym  $F$  jeśli jego pochodna (różniczka)  $dF_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  w punkcie  $x$  nie jest surjekcją. Obraz  $F(x)$  punktu krytycznego  $x$  nazywamy wartością krytyczną  $F$ . Punkt  $y \in \mathbb{R}^m$ , który nie jest wartością krytyczną  $F$  nazywamy wartością regularną  $F$ . Zauważmy, że jeżeli  $y \notin F(D)$  to  $y$  jest wartością regularną  $F$ .

Niech  $y \in F(D)$  będzie wartością regularną  $F$ . Pokazać, że wtedy  $n \geq m$  oraz przeciwobraz  $y$  czyli  $F^{-1}(y) = \{x \in D | F(x) = y\}$  jest rozmaitością różniczkową klasy  $C^r$ . Jaki jest wymiar  $F^{-1}(y)$ ?

**Zad. 3.** Pokazać, że  $n$ -wymiarowa sfera w  $\mathbb{R}^{n+1}$  jest orientowalną rozmaitością różniczkową.

**Zad. 4.** Pokazać, że  $GL(n, \mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) | \det A \neq 0\}$  jest rozmaitością różniczkową. Jaki jest wymiar  $GL(n, \mathbb{R})$ ? Czy  $GL(n, \mathbb{R})$  jest spójna? Jeśli nie to jakie ma składowe spójności? Czy  $GL(n, \mathbb{R})$  jest orientowalna?

**Zad. 5.** Pokazać, że  $SL(n, \mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) | \det A = 1\}$  jest rozmaitością różniczkową. Jaki jest wymiar  $SL(n, \mathbb{R})$ ? Czy  $SL(n, \mathbb{R})$  jest orientowalna?

**Zad. 6.** Pokazać, że wiązka styczna  $TM$  rozmaitości różniczkowej  $M$  wymiaru  $m$  jest orientowalną rozmaitością różniczkową (również wtedy, gdy  $M$  jest nieorientowalna). Jaki jest wymiar  $TM$ ?

**Zad. 7** Niech  $p_1$  i  $p_2$  będą punktami nie leżącymi na prostej  $\mathbb{R}$ . Rozważmy zbiór  $S = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cup \{p_1, p_2\}$ . Dla dowolnych dodatnich liczb  $a, b \in \mathbb{R}$  definiujemy zbiór  $I_{p_i}(-a, b) = (-a, 0) \cup (0, b) \cup \{p_i\}$  dla  $i = 1, 2$ . Wprowadzamy

topologię na  $S$  w następujący sposób. Topologia na  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  jest indukowana z  $\mathbb{R}$ . Baza otoczeń punktu  $p_i$  to zbiór  $\{I_{p_i}(-a, b) | a, b > 0\}$  dla  $i = 1, 2$ .

Pokazać, że każdy punkt  $S$  ma otoczenie homeomorficzne z przedziałem otwartym w  $\mathbb{R}$  (czyli  $S$  jest lokalnie euklidesowa).

Pokazać, że  $S$  ma przeliczalną bazę topologiczną.

Czy  $S$  jest rozmaitością topologiczną? Odpowiedź uzasadnij.

**Zad. 8** Na  $\mathbb{R}$  wprowadzamy dwie struktury różniczkowe. Pierwsza struktura różniczkowa jest wprowadzona przez atlas  $\{\text{Id} : \mathbb{R} \ni x \mapsto x \in \mathbb{R}\}$ , a druga jest wprowadzona przez atlas  $\{\phi : \mathbb{R} \ni x \mapsto x^3 \in \mathbb{R}\}$ . Pokazać, że otrzymane w ten sposób dwie różne struktury różniczkowe, ale istnieje dyfeomorfizm między tymi rozmaitościami różniczkowymi.