Geometria Rozmaitości Riemannowskich
Wydział MiNI PW

Zestaw zadań 2.

Zad. 1. Niech M, N, P będą rozmaitościami klasy C^r. Pokazać, że jeżeli $f : M \to N$ oraz $g : N \to P$ są przekształceniami klasy C^r to przekształcenie $g \circ f$ jest klasy C^r.

Zad. 2. Niech M_1, M_2 będą rozmaitościami klasy C^r. Pokazać, że przekształcenia $\pi_i : M_1 \times M_2 \ni (x_1, x_2) \mapsto x_i \in M_i$ są klasy C^r dla $i = 1, 2$.

Zad. 3. Niech M będzie rozmaitością klasy C^r. Pokazać, że przekształcenie $\Delta : M \ni x \mapsto (x, x) \in M \times M$ jest klasy C^r.

Zad. 4. Niech M_1, M_2, N_1, N_2 będą rozmaitościami klasy C^r. Pokazać, że jeżeli $f_1 : M_1 \to N_1$ oraz $f_2 : M_2 \to N_2$ są przekształceniami klasy C^r to przekształcenie $f_1 \times f_2 : M_1 \times M_2 \ni (x_1, x_2) \mapsto (f_1(x_1), f_2(x_2)) \in N_1 \times N_2$ jest klasy C^r.

Zad. 5. Niech M, N_1, N_2 będą rozmaitościami klasy C^r. Pokazać, że jeżeli $f_1 : M \to N_1$ oraz $f_2 : M \to N_2$ są przekształceniami klasy C^r to przekształcenie $(f_1, f_2) : M \ni x \mapsto (f_1(x), f_2(x)) \in N_1 \times N_2$ jest klasy C^r.

Zad. 6. Niech M będzie rozmaitością klasy C^r. Pokazać, że zbiór

$$C^r(M) = \{f : M \to \mathbb{R} \mid f \text{ jest klasy } C^r\}$$

z naturalnymi działaniami jest pierścieniem przemiennym z jedynką.

Zad. 7 Niech $D \subset \mathbb{R}^m$ będzie otwartym i spójnym zbiorem. Niech $f : D \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^∞. Przekształcenie Gaussa dla rozmaitości $\mathrm{graph} f$ to przekształcenie dane wzorem $N : \mathrm{graph} f \ni (x, f(x)) \mapsto N(x, f(x)) \in S^m$, gdzie $N(x, f(x))$ jest wektorem normalnym do $\mathrm{graph} f$ w punkcie $(x, f(x))$ czyli wektorem o długości 1 i prostopadłym do $T_{(x,f(x)}\mathrm{graph} f \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$. Pokazać, że przekształcenie Gaussa jest klasy C^∞.