Geometria Rozmaitości Riemannowskich, Wydział MiNI PW

Zestaw zadań 3.

Zad. 1. Niech M, N, P będą rozmaitościami klasy C^r i $x \in M$. Pokazać, że jeżeli $f : M \to N$ oraz $g : N \to P$ są przekształceniami klasy C^r to zachodzą równości

a) $d_x(g \circ f) = d_{f(x)}g \circ d_x f$,

b) $d_x(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_{T_x M}$.

Zad. 2. Niech M będzie rozmaitością klasy C^∞, $x \in M$. Pokazać, że dla dowolnych $v, w \in T_x M$, $f, g \in C^\infty(M)$, $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzą równości

a) $\partial_v(af + bg) = a\partial_v f + b\partial_v g$,

b) $\partial_v(f \cdot g) = \partial_v f \cdot g(x) + f(x) \cdot \partial_v g$,

c) $\partial_{av+bw} f = a\partial_v f + b\partial_w f$.

Zad. 3. Niech $F : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto (x^2, y^3, xy) \in \mathbb{R}^3$. Niech (u, v, w) oznaczają współrzędne na $\mathbb{R}^3$. Policzyć $d_{(x,y)}F \left(\frac{\partial}{\partial x}|_{(x,y)}\right)$ oraz $d_{(x,y)}F \left(\frac{\partial}{\partial y}|_{(x,y)}\right)$jako kombinację liniową $\frac{\partial}{\partial u}|_{F(x,y)}$, $\frac{\partial}{\partial v}|_{F(x,y)}$, $\frac{\partial}{\partial w}|_{F(x,y)}$.

Zad. 4. Niech M_1, M_2 będą rozmaitościami gładkimi, $(p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$ oraz $\pi_i : M_1 \times M_2 \ni (x_1, x_2) \mapsto x_i \in M_i$ dla $i = 1, 2$. Pokazać, że przekształcenie $d(\pi_1, \pi_2)_{(p_1,p_2)} : T_{(p_1,p_2)}(M_1 \times M_2) \to T_{p_1}M_1 \times T_{p_2}M_2$ jest izomorfizmem liniowym.

Zad. 5. Niech M, N będą rozmaitościami klasy C^∞ i niech $f : M \to N$ będzie przekształceniem klasy C^∞. Punkt $x \in M$ jest punktem krytycznym f jeżeli przykształcenie styczne $df_x : T_x M \to T_{f(x)}M$ nie jest surjekcją. Punkt $x \in M$ jest punktem regularnym M jeżeli $d_x f$ jest surjekcją. Punkt $y \in N$ jest wartością krytyczną f, jeżeli jest obrazem punktu krycznego tzn. jeżeli istnieje punkt krytyczny $x \in M$ przekształcenia f taki, że $y = f(x)$. Punkt $y \in N$ jest wartością regularną f, jeżeli nie jest wartością krytyczną f. Funkcja $g \in C^\infty$ ma minimum (maximum) lokalne w $p \in M$, jeżeli istnieje istnieje otoczenie $U \subset M$ punktu p takie, że dla każdego $q \in U$ $g(p) \leqslant g(q)$ $(g(p) \geqslant g(q))$. Pokazać, że jeżeli g ma ekstemum (maksimum lub minimum) lokalne w p to p jest punktem krytycznym g i podać postać $d_p g$.