

Geometria Rozmaitości Riemannowskich, Wydział MiNI PW

Zestaw zadań 4.

Zad. 1. Niech $\langle \cdot, \cdot \rangle$ będzie iloczynem skalarnym na rzeczywistej przestrzeni liniowej V i niech $u, v \in V$. Pokazać, że dla każdego $w \in V$ $\langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u = v$.

Zad. 2. Niech M będzie rozmaitością klasy C^∞ i $p \in M$. Pokazać, że dla dowolnego $v \in T_p M$ istnieje gładkie pole wektorowe X na M takie, że $X(p) = v$.

Zad. 3. Niech $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie rozmaitością riemannowską i $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Pokazać, że $X = Y$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $Z \in \mathcal{X}(M)$ $\langle X, Z \rangle = \langle Y, Z \rangle$.

Zad. 4. Niech $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$. Dla każdego punktu $p = (x, y) \in \mathbb{H}^2$ oraz $u, v \in T_p \mathbb{H}^2$ definiujemy $\langle u, v \rangle_{\mathbb{H}^2} = \frac{1}{y^2}(u_1 v_1 + u_2 v_2)$. Pokazać, że $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}^2}$ jest metryką Riemanna na \mathbb{H}^2 .

Zad. 5. Niech $\langle \cdot, \cdot \rangle$ będzie iloczynem skalarnym na skończonej wymiarowej rzeczywistej przestrzeni liniowej V i niech $u, v \in V$. Wtedy $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ jest normą na V . Dla krzywej gładkiej $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow V$ definiujemy

$$\frac{d}{dt}\gamma(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}.$$

Pokazać, że dla dowolnych krzywych gładkich $\gamma, \beta : \mathbb{R} \rightarrow V$ zachodzi

$$\frac{d}{dt} \langle \gamma(t), \beta(t) \rangle = \left\langle \frac{d}{dt}\gamma(t), \beta(t) \right\rangle + \left\langle \gamma(t), \frac{d}{dt}\beta(t) \right\rangle.$$