Geometria Rozmaitości Riemannowskich, Wydział MiNI PW

Zestaw zadań 5.

Zad. 1. Niech $f, g \in C^\infty(M)$ i $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Pakazać, że

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X.$$

Zad. 2. Niech D będzie pochdną kierunkową w $\mathbb{R}^n$ i $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$. Pokazać, że

1. $T(X, Y) = D_X Y - D_Y X - [X, Y] = 0,$
2. $R(X, Y)Z = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]} Z = 0,$
3. $X < Y, Z > = < D_X Y, Z > + < Y, D_X Z >.$

Zad. 3. Niech ∇ i $\tilde{\nabla}$ będą konekcjami afinicznymi na rozmaitości M. Czy $\nabla + \tilde{\nabla}$ jest konekcją na M? Odpowiedź uzasadnij.

Zad. 4. Niech $\nabla_1, \cdots, \nabla_k$ będą konekcjami na M. Pokazać, że dla $a_1, \cdots a_k \in \mathbb{R}$ $\sum_{i=1}^k a_i \nabla_i$ jest konekcją na M jeśli $\sum_{i=1}^k a_i = 1$.

Zad. 5. Pokazać, że tensor torsji $T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ dowolnej koneksji afinicznej ∇ jest przekształceniem $C^\infty(M)$-2-liniowym.

Zad. 6. Pokazać, że tensor krzywizny $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, $R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$ dowolnej koneksji afinicznej ∇ jest przekształceniem $C^\infty(M)$-3-liniowym.

Zad. 7. Czy przekształcenie $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$ (pochodna Liego) jest konekcją afiniczną? Odpowiedź uzasadnij.