

## Geometria Rozmaitości Riemannowskich, Wydział MiNI PW

### Zestaw zadań 6.

**Zad. 1.** Pokazać, że proste w  $\mathbb{R}^n$  są geodezyjnym w przestrzeni euklidesowej  $\mathbb{R}^n$ .

**Zad. 2.** Niech  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  z iloczynem skalarnym z  $\mathbb{R}^3$  obciętym do  $S^2$  jako tensorem metrycznym Riemanna. Niech  $\gamma : I \rightarrow S^2$  będzie krzywą gładką a  $V : I \rightarrow S^2$  gładkim polem wzgłędz krzywej  $\gamma$  tzn.  $V(t) \in T_{\gamma(t)}S^2$  dla każdego  $t \in I$ . Pokazać, że pole  $V$  jest równoległe wzdłuż  $\gamma$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $V'(t) = -(V(t) \cdot \gamma'(t))\gamma(t)$ .

**Zad. 3.** Wielkie koło na  $S^2$  to okrąg będący przecięciem  $S^2$  z dowolną płaszczyzną przechodzącą przez  $(0, 0, 0)$ . Pokazać, że dla dowolnego krótkiego łuku wielkiego koła przesunięcie równoległe wektora stycznego  $V$  wzdłuż tego łuku od punktu  $p$  do  $q$  jest dane wzorem  $V(q) = V - \frac{V \cdot q}{1+p \cdot q}(p + q)$ .

**Zad. 4.** Pokazać, że geodezyjnymi na  $S^2$  są wielkie koła.

**Zad. 5.** Dysk Poincarego to zbiór  $\mathbb{D} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$  z metryką Riemanna  $\langle \cdot, \cdot \rangle_z = \frac{4(dx \otimes dx + dy \otimes dy)}{(1 - |z|^2)^2}$ . Pokazać, że reper  $e_1 = \frac{1}{2}(1 - |z|^2)\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $e_2 = \frac{1}{2}(1 - |z|^2)\frac{\partial}{\partial y}$  jest ortonormalny na  $\mathbb{D}$ . Znaleźć reper dualny  $\theta^1, \theta^2$ , macierz koneksji  $(\omega_i^j)$ , macierz krzywizny  $(\Omega_i^j)$ , symbole Christoffela koneksji Riemannowskiej. We współrzędnych biegunowych wyznaczyć metrykę Riemanna, krzywiznę Gaussa, symbole Christoffela i równania geodezyjnych.