Wojciech Domitrz : Geometria rozmaitości Riemanna, wykład 1

Def.
Niech M będzie przestrzenią Hausdorffa, topologia na M ma przeliczalną bazę.

M nazywamy m-wymiarową rozmaitością topologiczną jeśli dla każdego punktu $x \in M$ istnieje otoczenie U punktu x takie, że U jest homeomorficzne z otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^m$

Niech $\varphi_U : U \to \varphi_U(U)$ będzie homeomorfizm, gdzie $\varphi_U(U)$ jest podzbiorem otwartym $\mathbb{R}^m$.

Wtedy (U, φ_U) nazywamy mapą rozmaitości M.

$\forall y \in U \quad \varphi_U(y) = u \in \varphi_U(U) \subset \mathbb{R}^m \qquad u = (u_1, \ldots, u_m)$ nazywamy lokalnymi współrzędnymi punktu $y \in U$.

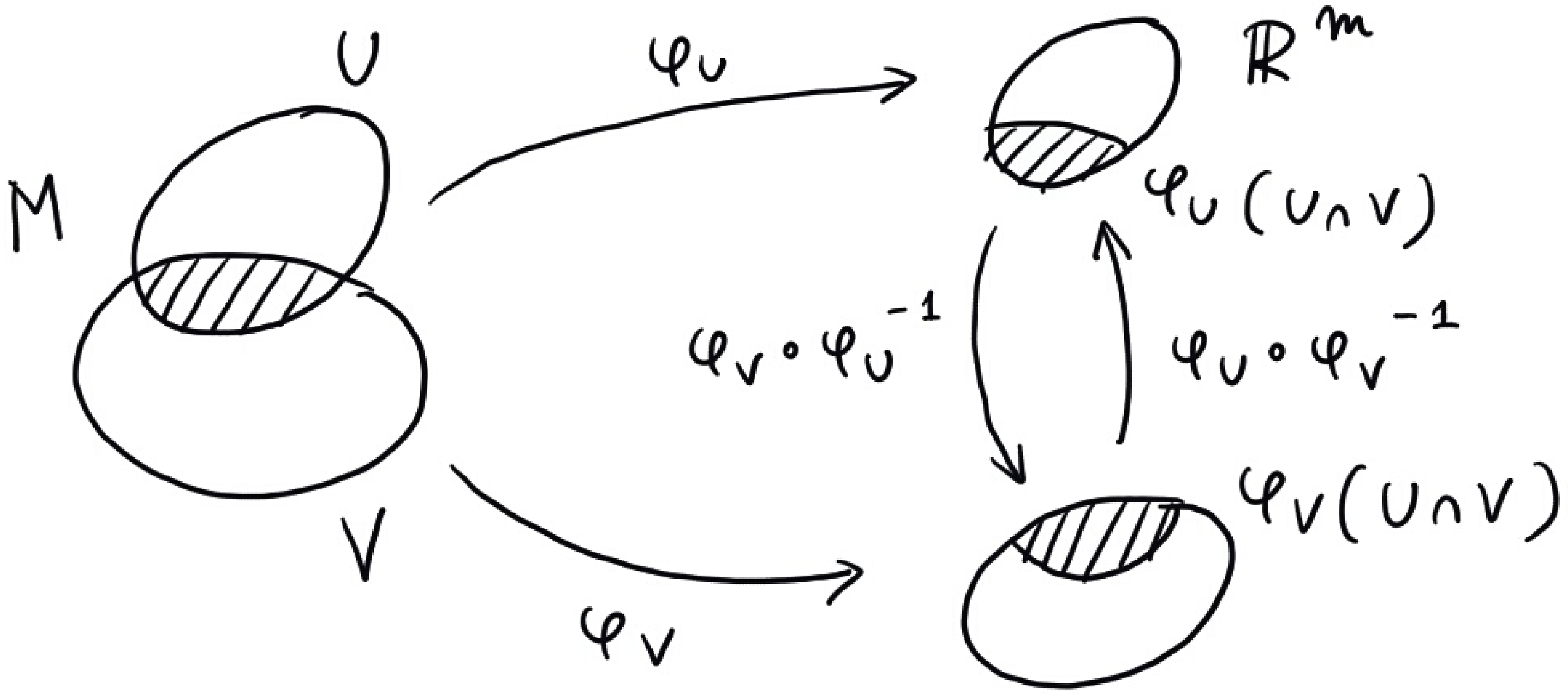
Niech $(U, \varphi_U), (V, \varphi_V)$ będą mapami rozmaitości M.

Jeśli $U \cap V \neq \emptyset$ to $\varphi_U(U \cap V)$ i $\varphi_V(U \cap V)$ są niepustymi podzbiorami otwartymi M. Przekształcenie

$\varphi_V \circ \varphi_U^{-1}|_{\varphi_U(U \cap V)} : \varphi_U(U \cap V) \to \varphi_V(U \cap V)$ jest homeomorfizmem pomiędzy podzbiorami otwartymi $\mathbb{R}^m$.

Przekształcenie odwrotne to $\varphi_U \circ \varphi_V^{-1}|_{\varphi_V(U \cap V)}$

$(U, \varphi_U), (V, \varphi_V)$ są C^r-zgodne jeśli $U \cap V = \emptyset$ albo $\varphi_V \circ \varphi_U^{-1}|_{\varphi_U(U \cap V)}$, $\varphi_U \circ \varphi_V^{-1}|_{\varphi_V(U \cap V)}$ są klasy C^r jeśli $U \cap V \neq \emptyset$.



Def. Niech M będzie m-wymiarową rozmaitością.

Zbiór map rozmaitości M $\mathcal{A} = \{(U,\varphi_U),(V,\varphi_V),(W,\varphi_W),\dots\}$ nazywamy **strukturą różniczkową klasy C^r** na M jeśli:

1) Zbiór $\{U : (U,\varphi_V) \in \mathcal{A}\}$ jest pokryciem M
2) $\forall (U,\varphi_U),(V,\varphi_V) \in \mathcal{A}$ mapy (U,φ_U), (V,φ_V) są C^r-zgodne
3) $\mathcal{A}$ jest maksymalny tzn. jeśli $(\tilde{U},\varphi_{\tilde{U}})$ jest C^r-zgodny z (U,φ_U) dla każdej mapy $(U,\varphi_U) \in \mathcal{A}$ to $(\tilde{U},\varphi_{\tilde{U}}) \in \mathcal{A}$.

Jeśli na M jest zadana struktura różniczkowa klasy C^r to M nazywamy **rozmaitością różniczkową klasy C^r**.

Rozmaitości różniczkowe klasy C^∞ nazywamy **gładkimi rozmaitościami różniczkowymi**, a rozmaitości klasy C^ω **analitycznymi rozmaitościami różniczkowymi**.

Uwaga 1. Zbiór map $\mathcal{A}'$ na M nazywamy **atlasem** jeśli $\mathcal{A}$ spełnia warunki 1) - 2). Każdy atlas $\mathcal{A}'$ na M można rozszerzyć do struktury różniczkowej w następujący sposób:

$\mathcal{A} = \{(U,\varphi_U) \mid (U,\varphi_U)$ jest mapą na M zgodną z $\mathcal{A}'\}$

Stąd wynika, że do zadania struktury różniczkowej klasy C^∞ wystarczy jakikolwiec atlas map klasy C^∞.

Uwaga 2. Zakładamy dodatkowo, że M ma przeliczalną bazę topologiczną.

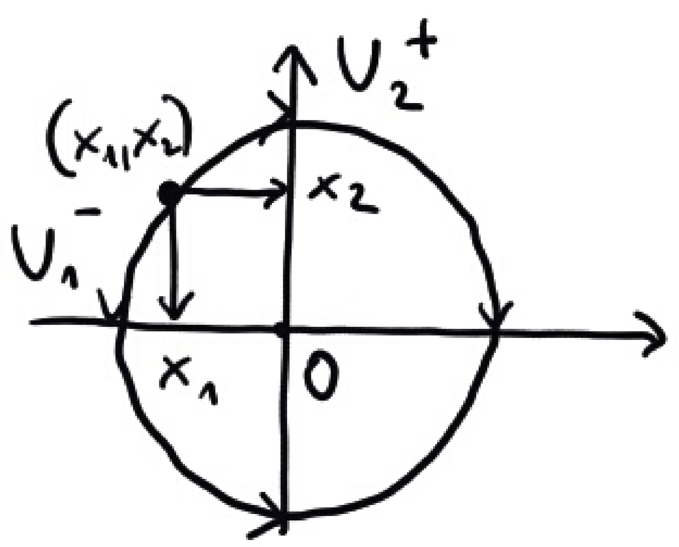
Przykład 1. $M = \mathbb{R}^m$ $U = M$ $\varphi_U = id_{\mathbb{R}^m}$. Wtedy $\{(\mathbb{R}^m, Id_{\mathbb{R}^m})\}$ – atlas na $\mathbb{R}^m$

Przykład 2. $S^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : x_1^2 + \dots + x_m^2 + x_{m+1}^2 = 1\}$

$U_i^+ = \{x \in S^m \mid x^i > 0\}$, $\varphi_{U_i^+}(x) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^m$

$U_i^- = \{x \in S^m \mid x^i < 0\}$, $\varphi_{U_i^-}(x) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^m$

$\mathcal{A}' = \{(U_i^+, \varphi_{U_i^+}), (U_i^-, \varphi_{U_i^-}) \mid i = 1, \dots, m+1\}$



$S^1 = \{(x_1,x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$

$$\left(\varphi_{U_i^\pm} \circ \varphi_{U_j^\pm}^{-1}\right)(y_1, \dots, y_m) = \varphi_{U_i^\pm}\left(y_1, \dots, y_{j-1}, \sqrt{1 - \sum_{l=1}^m y_l^2}, y_j, \dots, y_m\right) =$$

$$= \left(y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_{j-1}, \sqrt{1 - \sum_{l=1}^m y_l^2}, y_j, \dots, y_m\right)$$

Przykład 3. m-wymiarowa przestrzeń rzutowa $\mathbb{RP}^m$

$\mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}$, $x, y \in \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\}$ $x \sim y$ jeśli istnieje $a \in \mathbb{R}$ t.że $x = ay$. $\mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\} / \sim \; = \mathbb{RP}^m$

$[x^1, \dots, x^{m+1}] = [(x^1, \dots, x^{m+1})]_\sim$ $U_i = \{[x_1, \dots, x_{m+1}] \mid x_i \neq 0\}$ $\varphi_{U_i}([x_1, \dots, x_{m+1}]) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{m+1}}{x_i}\right) \in \mathbb{R}^m$

zał, że $i < j$

$$\varphi_{U_i} \circ \varphi_{U_j}^{-1}(y_1, \dots, y_m) = \varphi_{U_i}([y_1, \dots, y_{j-1}, 1, y_j, \dots, y_m]) = \Big(\underbrace{\frac{y_1}{y_i}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_i}}_{i-1}, \underbrace{\frac{y_{i+1}}{y_i}, \dots, \frac{y_{j-1}}{y_i}}_{j-1-i}, \underbrace{\frac{1}{y_i}}_{1}, \underbrace{\frac{y_j}{y_i}, \dots, \frac{y_m}{y_i}}_{m-j+1}\Big)$$

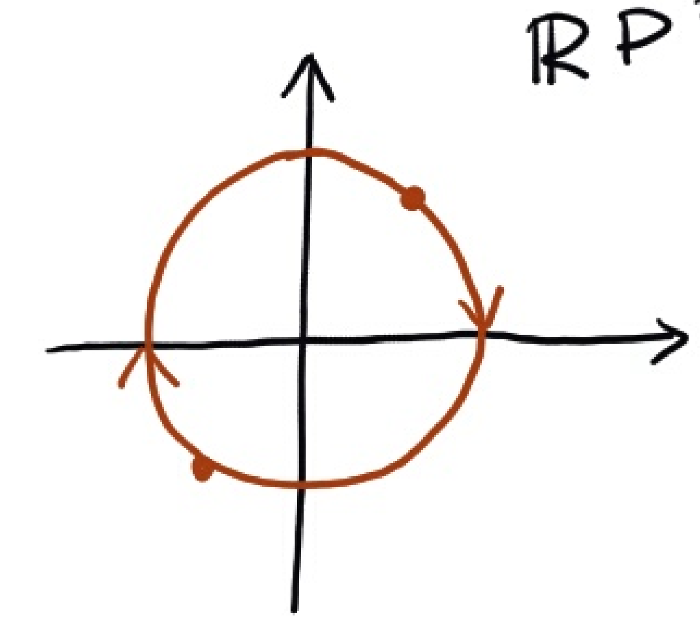
$\frac{x_1}{x_j} = y_1, \dots, \frac{x_{j-1}}{x_j} = y_{j-1}$ $\frac{x_{j+1}}{x_j} = y_j, \dots, \frac{x_{m+1}}{x_j} = y_m$

$i - 1 + j - 1 - i + 1 + m - j + 1 = m$

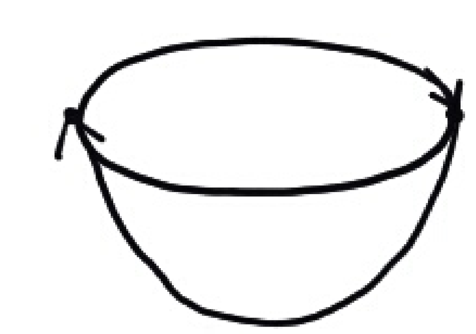
$x_1 = x_j y_1, \dots, x_{j-1} = x_j y_{j-1}, x_{j+1} = x_j y_j, \dots, x_{m+1} = x_j y_m$

$[y_1, \dots, y_{j-1}, 1, y_j, \dots, y_m]$

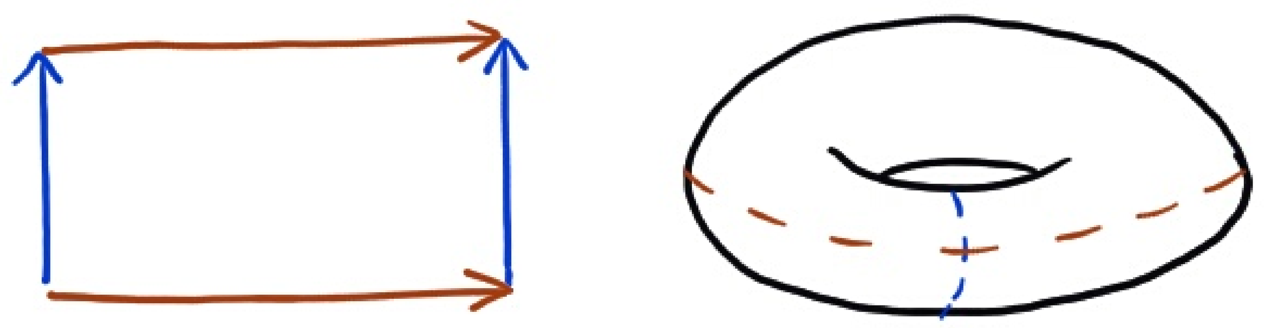
$\mathbb{RP}^1$



$\mathbb{RP}^2 = D^2 \cup \mathbb{RP}^1$



Przykład 4. Torus $T^2 = S^1(r) \times S^1(r)$. Ogólniej n-wymiarowy torus to zbiór $T^n = (S^1(r))^n$.



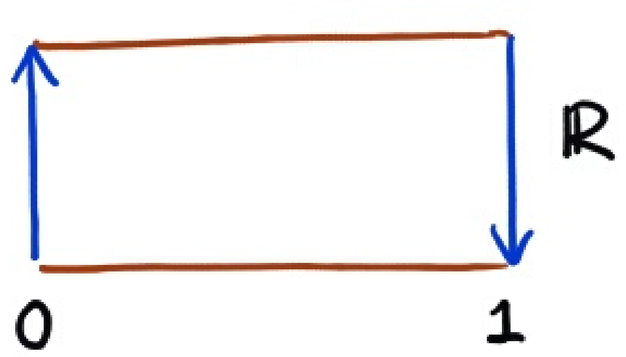
Stw. Jeżeli M_i jest m_i-wymiarową rozmaitością dla $i=1,2$ to $M_1 \times M_2$ jest m_1+m_2 - rozmaitością różniczkową.

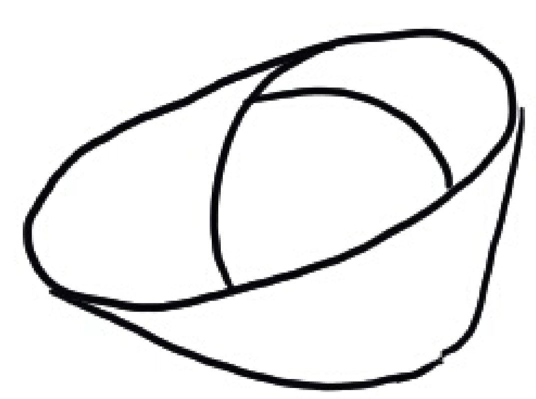
Dowód: $\mathcal{A}_i$ - atlas na M_i dla $i=1,2$. Wtedy $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 := \{ (U_1 \times U_2, \varphi_1 \times \varphi_2) \mid (U_1, \varphi_1) \in \mathcal{A}_1, (U_2, \varphi_2) \in \mathcal{A}_2 \}$ - atlas na $M_1 \times M_2$.

$(\varphi_1 \times \varphi_2)(x_1, x_2) \overset{\text{def.}}{=} (\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2))$ $\quad (\varphi_1 \times \varphi_2) \circ (\psi_1 \times \psi_2)^{-1} = (\varphi_1 \times \varphi_2) \circ (\psi_1^{-1} \times \psi_2^{-1}) = (\varphi_1 \circ \psi_1^{-1}) \times (\varphi_2 \circ \psi_2^{-1})$ $\quad \varphi_i \circ \psi_i^{-1}$ - klasy C^r $i=1,2$

Stąd $(\varphi_1 \circ \psi_1^{-1}) \times (\varphi_2 \circ \psi_2^{-1})$ - klasy C^r ∎

Przykład 5. Wstęga Möbiusa





Część wstęgi Möbiusa dla $|x| \le 1$

$[0,1] \times \mathbb{R} /_\sim$ $\quad (0,x) \sim (1,-x)$ $\quad [(t,x)]_\sim = \begin{cases} \{(t,x)\} & \text{dla } t \neq 0 \text{ i } t \neq 1 \\ \{(0,-x),(1,x)\} & \text{dla } t=0 \text{ lub } t=1 \end{cases}$

topologia ilorazowa

$U = \{ [(t,x)]_\sim \mid t \neq 0 \text{ i } t \neq 1 \}$ $\quad V = \{ [(t,x)]_\sim \mid t \neq \frac{1}{2} \}$

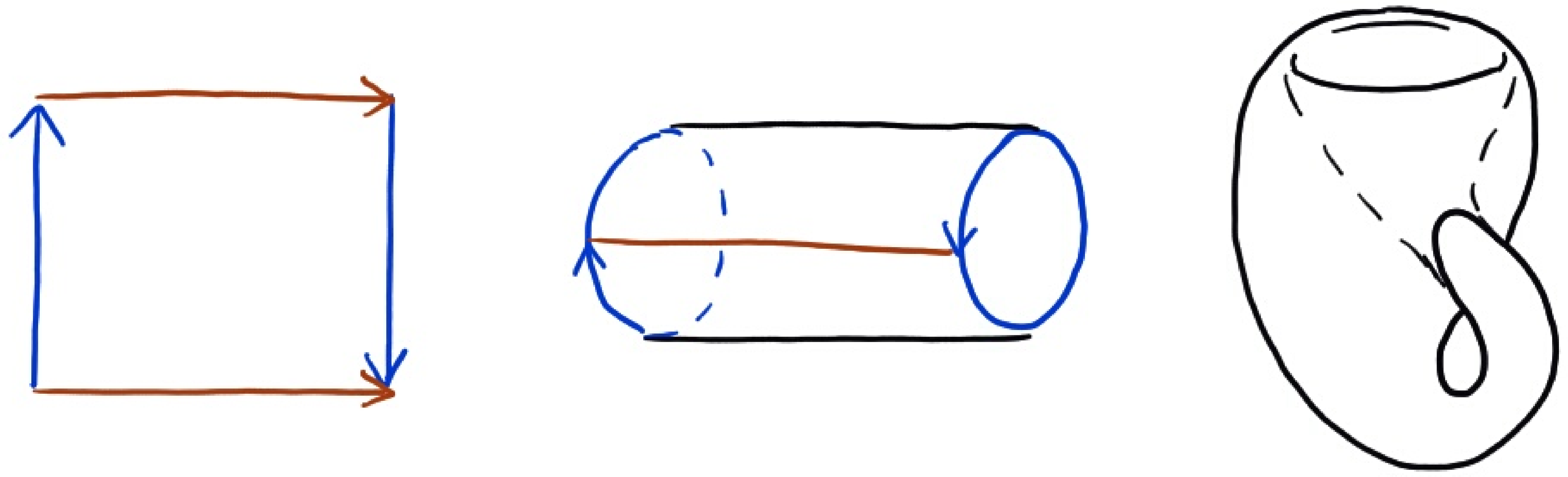
$\varphi : U \to \mathbb{R}^2$ $\quad \psi : V \to \mathbb{R}^2$ $\quad \varphi([(t,x)]_\sim) = (t,x)$ $\quad \psi([(t,x)]_\sim) = \begin{cases} (t,x) & \text{dla } t < \frac{1}{2} \\ (t-1,-x) & \text{dla } t > \frac{1}{2} \end{cases}$

$\psi([(0,x)]_\sim) = (0,x)$ $\quad \psi([(1,-x)]_\sim) = (1-1, -(-x)) = (0,x)$

$(\varphi \circ \psi^{-1})(t,x) = \begin{cases} (1+t,-x) & \text{dla } t<0 \\ (t,x) & \text{dla } t>0 \end{cases}$ $\quad (\psi \circ \varphi^{-1})(t,x) = \begin{cases} (t,x) & \text{dla } t < \frac{1}{2} \\ (t-1,-x) & \text{dla } t > \frac{1}{2} \end{cases}$

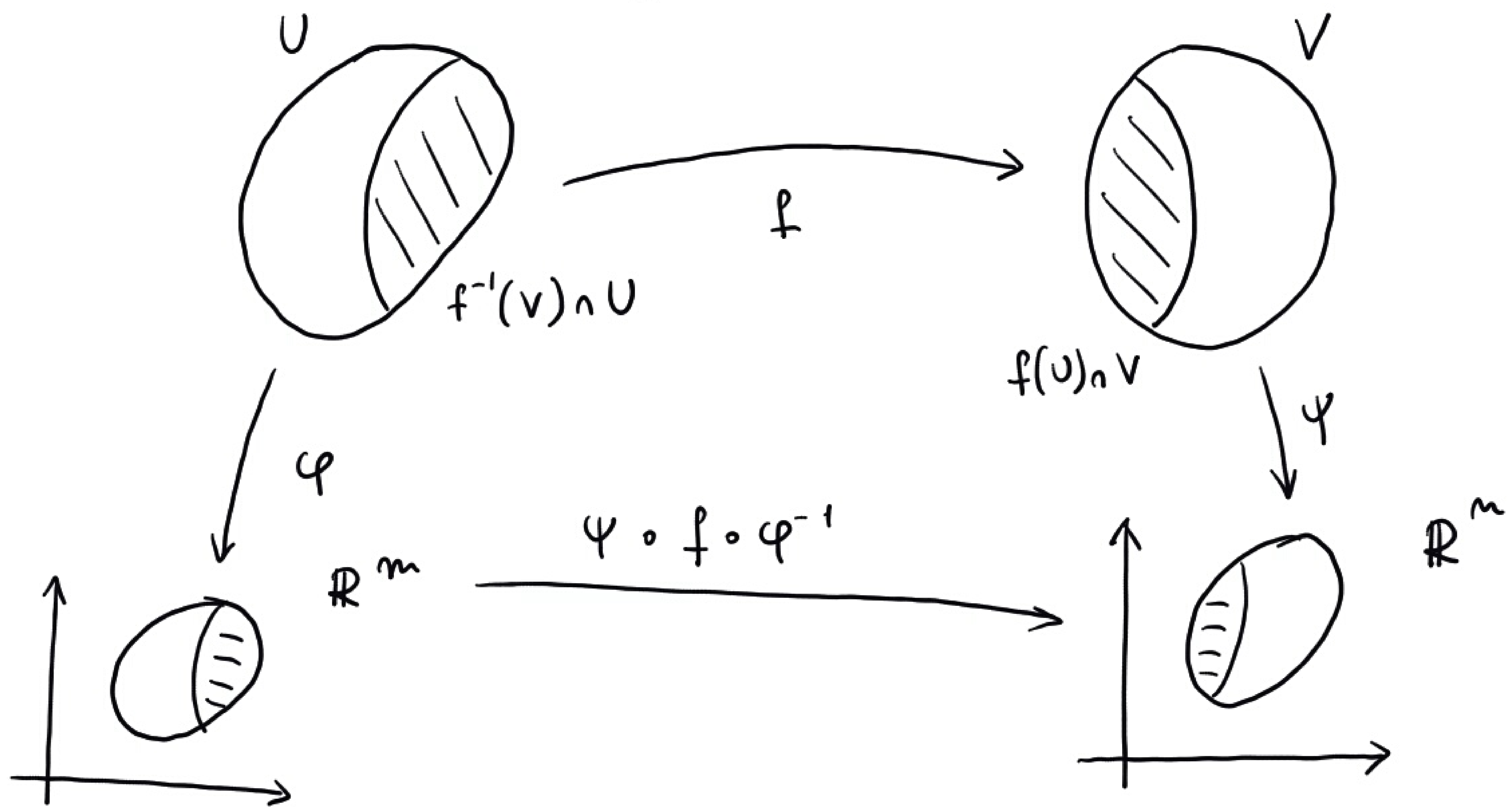
Przykład 6. Butelka Kleina

$S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1 \}$ $\quad z \in S^1 \Rightarrow \bar{z} \in S^1$ $\quad [0,1] \times S^1 / \sim$ $\quad (0, z) \sim (1, \bar{z})$



Niech M, N będą rozmaitościami różniczkowymi klasy C^r wymiarów m i n ze strukturami różniczkowymi $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ odpowiednio.

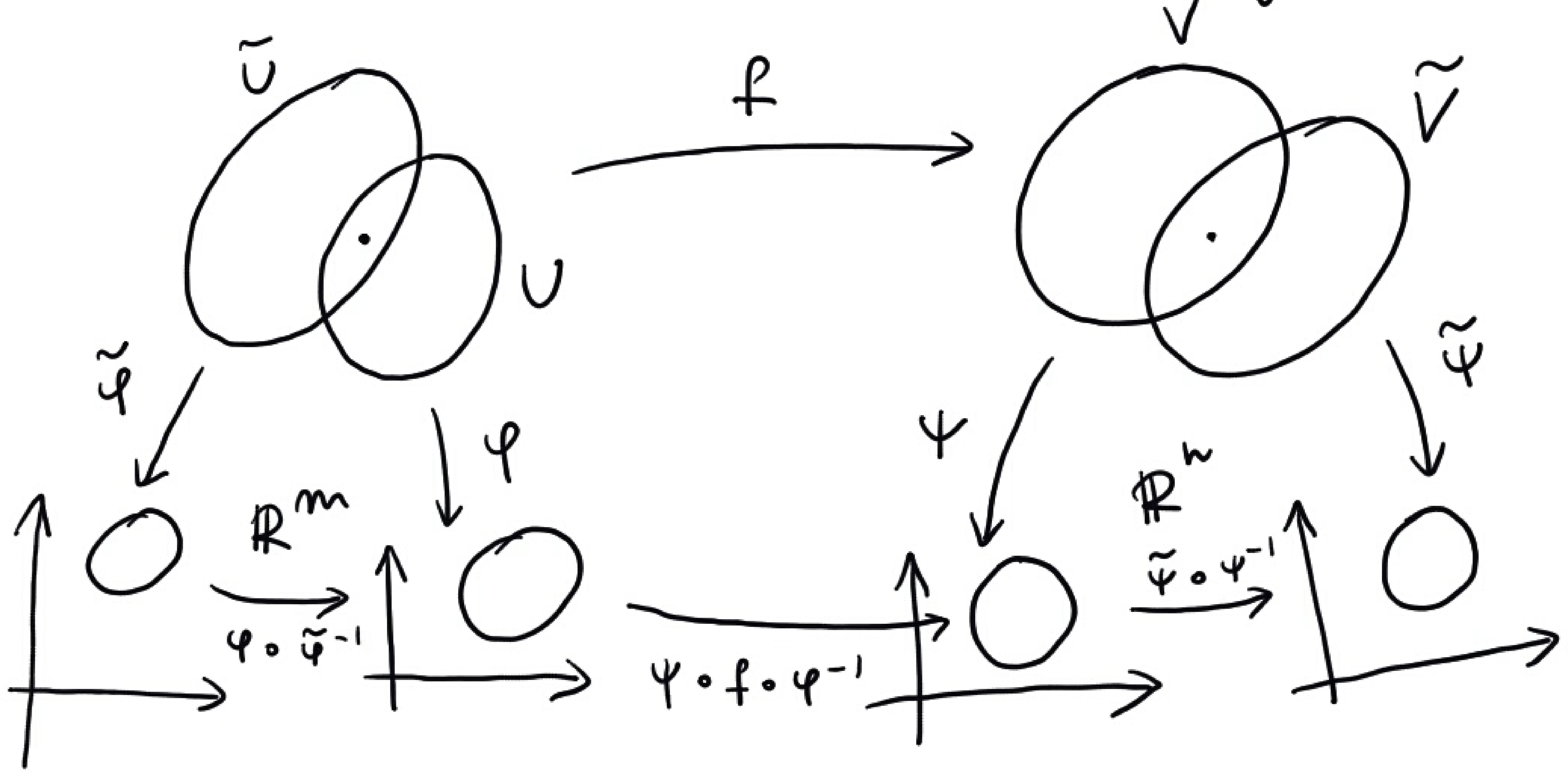
Def. Przekształcenie ciągłe $f: M \to N$ nazywamy klasy C^r, jeżeli dla dowolnych map $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ i $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ złożenie $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ jest klasy C^r w swojej dziedzinie.



Przekształcenie klasy C^∞ nazywamy przekształceniem gładkim.

Tw. Niech $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$ będą atlasami na rozmaitościach M i N klasy C^r odpowiednio. Przekształcenie ciągłe $f: M \to N$ jest klasy C^r wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych map $(U,\varphi) \in \mathcal{A}'$ i $(V,\psi) \in \mathcal{B}'$ przekształcenie $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ jest klasy C^r w swojej dziedzinie.

Dowód: Niech $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ będą strukturami różniczkowymi na M i N odpowiednio. Wtedy $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ oraz $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$. Niech $(\tilde{U},\tilde{\varphi}) \in \mathcal{A}$ i $(\tilde{V},\tilde{\psi}) \in \mathcal{B}$. Niech u będzie dowolnym punktem dziedziny $\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}$. Wtedy istnieje mapa $(U,\varphi) \in \mathcal{A}'$ t, że $x = \tilde{\varphi}^{-1}(u) \in U$ i istnieje mapa $(V,\psi) \in \mathcal{B}$ t, że $f(x) \in V$. W dostatecznie małym otoczeniu punktu u zachodzi $\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1} = (\tilde{\psi} \circ \psi^{-1}) \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ (\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1})$



Przekształcenia $\varphi \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ i $\tilde{\psi} \circ \psi^{-1}$ są klasy C^r bo $\varphi, \tilde{\varphi} \in \mathcal{A}$ i $\psi, \tilde{\psi} \in \mathcal{B}$. Z zał. przekształcenie $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ jest klasy C^r. Stąd $\tilde{\psi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}$ jest klasy C^r. ■

Następujące twierdzenia otrzymujemy bezpośrednio z definicji:

Tw. Jeżeli M, N, P są rozmaitościami różniczkowalnymi klasy C^r i $f: M \to N$, $g: N \to P$ są klasy C^r to $g \circ f: M \to P$ jest klasy C^r.

Tw. Jeżeli M_1, M_2 są rozmaitościami klasy C^r to rzutowanie $\pi_i : M_1 \times M_2 \ni (x_1, x_2) \to x_i \in M_i$ jest klasy C^r dla $i=1,2$.

Jeżeli M jest rozmaitością klasy C^r to $\Delta : M \ni x \mapsto (x,x) \in M \times M$ jest klasy C^r.

Tw. $f_1 : M_1 \to N_1$, $f_2 : M_2 \to N_2$ są klasy C^r wtedy i tylko wtedy, gdy $f_1 \times f_2 : M_1 \times M_2 \to N_1 \times N_2$ jest klasy C^r.

Tw $f_1 : M \to N_1$, $f_2 : M \to N_2$ są klasy C^r wtedy i tylko wtedy, gdy $(f_1, f_2) : M \ni x \mapsto (f_1(x), f_2(x)) \in N_1 \times N_2$ (zestawienie f_1 i f_2) jest klasy C^r.

$C^r(M)$ – pierścień funkcji klasy C^r $M \to \mathbb{R}$

Def. $f : M \to N$ nazywamy dyfeomorfizmem klasy C^r jeśli f jest bijekcją klasy C^r oraz f^{-1} jest klasy C^r.