Wojciech Domitrz : Geometria rozmaitości Riemanna, wykład 5

Niech M będzie rozmaitością gładką wymiaru m.

Def. X jest **polem wektorowym** na M jeśli $\forall p \in M \quad X(p) = X_p \in T_pM$.

Jeśli $V \subset M$ i X jest określone na V to mówimy, że jest to pole wektorowe na V.

Niech X będzie polem na M. Niech (U, φ) będzie mapą na M.

Def. **Współrzędnymi pola** X w mapie (U,φ) nazywamy funkcję $(\xi^1(x), \ldots, \xi^m(x)) = \tilde{\varphi}_x(X(x))$ dla $x \in U$.

gdzie $\tilde{\varphi}_x([\gamma]) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\varphi \circ \gamma)(t)$ dla $[\gamma] = X(x)$ czyli $\xi^i(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\varphi^i \circ \gamma)(t)$ dla $[\gamma] = X(x)$

Niech $V \subset M$ otwarty. $C^\infty(V)$ - algebra funkcji gładkich na V. Niech X pole wektorowe na V.

$X(f)(x) = X_x f = \partial_{X(x)} f = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (f \circ \gamma)(t)$ dla $[\gamma] = X(x)$

Stąd $(X(f))(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (f\circ\gamma)(t) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial u^i}(\varphi(x)) \cdot \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\varphi^i \circ \gamma)(t) = \sum_{i=1}^m \xi^i(x) \cdot \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial u^i}(\varphi(x))$

Def. Pole wektorowe X jest gładkie jeśli $\forall (U,\varphi)$ - mapy na M współrzędne pola X w tej mapie są gładkie na U
co jest równoważne temu, że $\forall f \in C^\infty(M) \quad Xf \in C^\infty(M)$.

Tw. X, Y gładkie pola wektorowe na M to $\forall a,b \in \mathbb{R} \quad \forall f,g,h \in C^\infty(M)$ zachodzi

1) $X(af + bg) = aXf + bXg$ 2) $X(f\cdot g) = (Xf)g + f(Xg)$ 3) $(fX + gY)(h) = f(Xh) + g(Yh)$

Tw. Jeżeli odwzorowanie $\partial : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ spełnia warunki $\forall a,b \in \mathbb{R} \quad \forall f,g \in C^\infty(M)$

1) $\partial(af+bg) = a\partial f + b\partial g$ 2) $\partial(fg) = (\partial f)g + f\partial g$

to istnieje dokładnie jedno gładkie pole wektorowe X na M takie, że $\forall f \in C^\infty(M) \quad Xf = \partial f$.

Dowód: (U,φ) - mapa na M. Niech pole X ma współrzędne w mapie (U,φ) zadane wzorem $\xi^i(p) = (\partial\varphi^i)(p)$ dla $p\in U$. Wtedy $(Xf)(p) = \sum_{i=1}^{m} \xi^i(p) \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial u^i}(\varphi(p)) = \sum_{i=1}^{m}(\partial\varphi^i)(p)\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial u^i}(\varphi(p)) =$

$=(\partial(f\circ\varphi^{-1}\circ\varphi))(p) = (\partial f)(p)$ i pole X jest gładkie gdyż $\partial\varphi^i$ są gładkie dla $i=1,\dots,m$ ∎

Niech (U,φ) mapa na M. Dla $i=1,\dots,m$ określamy pole wektorowe ∂_i na U następująco

$\partial_i|_p = [t\longmapsto \varphi^{-1}(\varphi(p)+te_i)]$, gdzie $e_i = (0,\dots,0,\overset{i}{\downarrow}{1},0,\dots,0)$ czyli $\tilde\varphi_p(\partial_i|_p) = e_i$.

$\tilde\varphi_p$ jest izomorfizmem liniowym $\tilde\varphi_p : T_pM \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Stąd $\partial_1|_p,\dots,\partial_m|_p$ stanowią bazę T_pM.

Pole wektorowe $\partial_1,\dots,\partial_m$ nazywamy **kanonicznym reperem skojarzonym** z mapą (U,φ).

Niech X będzie gładkim polem wektorowym na M. Wtedy $X(x) = \sum_{i=1}^{m} X^i(x)\partial_i|_x$. $\tilde\varphi_x(X(x)) = \tilde\varphi_x(\sum_{i=1}^{m} X^i(x)\partial_i|_x) =$

$= \sum_{i=1}^{m} X^i(x)\tilde\varphi_x(\partial_i|_x) = \sum_{i=1}^{m} X^i(x) e_i$ $\quad (X\varphi^i)(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\varphi^i\circ\gamma)(t)$

$$\partial_i\varphi^j = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\varphi^j\circ\varphi^{-1})(\varphi(p)+te_i) = \delta_i^j$$

$$\partial_i f = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}((f\circ\varphi^{-1})(\varphi(p)+te_i)) = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial u^j}(\varphi(x))\,\frac{d(\varphi^j(x)+t\delta_i^j)}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial u^i}(\varphi(x))$$

$$\partial_i f = \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial u^i}\circ\varphi$$

Def. Przestrzeń wektorową A nad $\mathbb{R}$ nazywamy algebrą Liego jeśli w A mamy określone działanie $[\cdot,\cdot] : A \times A \ni (u,v) \mapsto [u,v] \in A$ spełniające następujące warunki

1) $[\cdot,\cdot]$ jest 2-liniowe i skośnie symetryczne (antysymetryczne)

$\forall a,b \in \mathbb{R} \ \forall u,v,w \in A \quad [au+bv, w] = a[u,w] + b[v,w], \ [u, av+bw] = a[u,v] + b[u,w]$

$[u,v] = -[v,u]$

2) zachodzi tożsamość Jacobiego $\forall u,v,w \in A \quad [u,[v,w]] + [v,[w,u]] + [w,[u,v]] = 0$

$[\cdot,\cdot]$ - nazywamy nawiasem Liego.

Niech X, Y gładkie pole wektorowe. Wtedy określamy pole wektorowe $[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$ dla $f \in C^\infty(M)$

Tw. $[X,Y]$ jest gładkim polem wektorowym, a $[\cdot,\cdot]$ jest nawiasem Liego.

Dowód: bezpośrednie sprawdzenie liniowości $[X,Y]$ i reguły Leibniza oraz warunków nawiasu Liego.

Tw. Zachodzi wzór $[X, fY] = (Xf)Y + f[X,Y]$ czyli $[X,\cdot]$ jest różniczkowaniem.

Dowód: $[X,fY](g) = X((fY)(g)) - (fY)(Xg) = X(f\cdot Yg) - fY(Xg) = (Xf)(Yg) + f(X(Yg)) - f(Y(Xg)) = ((Xf)Y - f[X,Y])g$ ∎

Stosujemy konwencję sumacyjną Einsteina czyli $a^i b_i \overset{df.}{=} \sum_{j=1}^{m} a^j b_j$

Tw. Niech (U,φ) mapa na M. X,Y - gładkie pole wektorowe na U oraz $X = X^i \partial_i$ oraz $Y = Y^j \partial_j$

Wtedy $[X,Y] = [X,Y]^i \partial_i$ gdzie $[X,Y]^i = X^j \partial_j Y^i - Y^j \partial_j X^i$

Dowód: $[X,Y] = [X^i \partial_i, Y^j \partial_j] = X^i(\partial_i Y^j)\partial_j + Y^j[X^i\partial_i, \partial_j] = X^i(\partial_i Y^j)\partial_j - Y^j[\partial_j, X^i \partial_i] = X^j(\partial_j Y^i)\partial_i - Y^j(\partial_j X^i)\partial_i$
$- Y^j X^i [\partial_j, \partial_i]$

$[\partial_i,\partial_j](f)=\partial_i(\partial_j f)-\partial_j(\partial_i f)$ $\quad \partial_i f=\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial u^i}\circ\varphi$ $\quad \partial_j(\partial_i f)=\frac{\partial}{\partial u^j}\left(\frac{\partial}{\partial u^i}(f\circ\varphi^{-1})\circ\varphi\circ\varphi^{-1}\right)\circ\varphi=\frac{\partial^2}{\partial u^j\partial u^i}(f\circ\varphi^{-1})\circ\varphi=\partial_i(\partial_j f)=\frac{\partial^2}{\partial u^i\partial u^j}(f\circ\varphi^{-1})\circ\varphi$

Stąd $\partial_i(\partial_j f)=\partial_j(\partial_i f)$ czyli $[\partial_i,\partial_j](f)=0$. Stąd $[X,Y]=(X^j\partial_j Y^i-Y^j\partial_j X^i)\partial_i$ ∎

Niech X będzie gładkim polem wektorowym na M, Y gładkim polem wektorowym na N, a $f: M\to N$ przekształceniem gładkim.

Def. Pola X i Y są f - *związane* jeśli $\forall\, x\in M$ $\quad d_x f(X_x)=Y_{f(x)}$

Tw. Pola X i Y są f - związane $\iff \forall\, g\in C^\infty(N)$ $\quad X(g\circ f)=Y(g)\circ f$

Dowód.: $X(g\circ f)=Y(g)\circ f \iff X_x(g\circ f)=Y_{f(x)}(g)$ $\qquad d_x f(X_x)=Y_{f(x)} \iff X_x=[\gamma]$ $\qquad d_x f(X_x)=[t\mapsto(f\circ\gamma)(t)]$

$$[t\mapsto(f\circ\gamma)(t)]=Y_{f(x)} \qquad Y_{f(x)}(g)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(g\circ f\circ\gamma)(t)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}((g\circ f)\circ\gamma)(t)=X_x(g\circ f) \quad ∎$$

Tw. $X,X'\in\mathfrak{X}(M)$, $Y,Y'\in\mathfrak{X}(N)$ $\quad f: M\to N$ gładkie. Jeżeli X,Y są f - związane i X',Y' są f - związane to

1) $\forall\, a,b\in\mathbb{R}$ pola $aX+bX'$ oraz $aY+bY'$ są f - związane $\quad$ 2) $[X,X']$ i $[Y,Y']$ są f - związane

3) $\forall\, g\in C^\infty(N)$ pola $(g\circ f)\cdot X$ oraz gY są f - związane

Dowód.: Bezpośredni rachunek na podstawie poprzedniego tw.

Niech $f: M\to N$ będzie dyfeomorfizmem.
Wtedy dla dowolnego gładkiego pola wektorowego X na M istnieje dokładnie jedno pole wektorowe na N oznaczane symbolem $f_* X$ takie że X i $f_* X$ są f - związane. Pole $f_* X$ jest określone następującym wzorem

$(f_* X)_y=(d_{f^{-1}(y)}f)(X_{f^{-1}(y)})$ $\quad$ czyli $\quad \forall\, g\in C^\infty(N)$ $\quad (f_* X)(g)=X(g\circ f)\circ f^{-1}$ $\quad f_* X$ nazywamy *obrazem pola* X.

Tw. Niech $f : M \to N$ będzie dyfeomorfizmem. Wtedy operację obrazu $f_* : \mathcal{X}(M) \ni X \longmapsto f_* X \in \mathcal{X}(N)$ jest izomorfizmem algebr Liego tzn. $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ $\forall\, X, Y \in \mathcal{X}(M)$ $f_*(aX + bY) = a f_* X + b f_* Y$, $f_*[X, Y] = [f_* X, f_* Y]$ oraz f jest bijekcją.

Dodatkowo $\forall\, f \in C^\infty(M)$ $f_*(gX) = (g \circ f^{-1})(f_* X)$

Uwaga! Niech $f : M \to N$ będzie przekształceniem gładkim. Polem wektorowym wzdłuż f nazywamy przekształcenie Y takie, że $\forall\, x \in M$ $Y(x) \in T_{f(x)} N$. Pole Y jest gładkie jeżeli dla każdej mapy (V, ψ) na N takiej, że $f(x) \in V$ $\tilde{\psi}_{f(x)}(Y(x)) = (\xi_1(x), \dots, \xi_n(x))$ funkcje ξ_i są gładkie funkcjami na $f^{-1}(V)$ czyli $Y(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(x)\, \partial_i|_{f(x)}$

gdzie $\tilde{\psi}_{f(x)}(\partial_i|_{f(x)}) = e_i$ dla $i = 1, \dots, n$

$\mathcal{X}_f(M)$ - zbiór wszystkich gładkich pól wektorowych wzdłuż odwzorowania f

Przykłady pól wektorowych wzdłuż przekształcenia $f : M \to N$

1) Niech X będzie gładkim polem wektorowym na M wtedy pole dane wzorem $(f_* X)_x = d_x f(X_x)$ jest gładkim polem wektorowym wzdłuż f

2) Niech Y będzie gładkim polem wektorowym na N. Wtedy pole $\tilde{Y}(x) = Y_{f(x)}$ jest gładkim polem wzdłuż f

Niech M będzie rozmaitością gładką.

Def. Przepływem lokalnym na M nazywamy przekształcenie $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \ni (t, x) \mapsto \varphi_t(x) \in M$ takie, że

1) U jest podzbiorem otwartym M 2) $\forall\, t$ $|t| < \varepsilon$ $\varphi_t : U \to \varphi_t(U)$ jest dyfeomorfizmem

3) $\forall\, t, s$ $\forall\, x \in U$ $|t|, |s|, |t+s| < \varepsilon$ oraz $x, \varphi_t(x) \in U$ $\varphi_s(\varphi_t(x)) = \varphi_{s+t}(x)$ 4) $\forall\, x \in U$ $\varphi_0(x) = x$

φ_t jest globalnym przepływem jeśli $U = M$ i $\varepsilon = +\infty$.

Lokalne (globalne) przepływy nazywamy w geometrii jednoparametrowymi grupami transformacji (w geometrii) oraz lokalnymi (globalnymi) układami dynamicznymi (w równaniach różniczkowych zwyczajnych)

Lokalny przepływ na $U \subset M$ (otwarty podzbiór) wyznacza pole wektorowe na M (pole indukowane przez lokalny przepływ)

$$X(x) = \frac{d\varphi_s(x)}{ds}\Big|_{s=0}$$

Uwaga! $X(\varphi_t(x)) = \frac{d\varphi_s(\varphi_t(x))}{ds}\Big|_{s=0} = \frac{d\varphi_{s+t}(x)}{ds}\Big|_{s=0} = \frac{d\varphi_s(x)}{ds}\Big|_{s=t}$ czyli $X(\varphi_t(x)) = \frac{d\varphi_s(x)}{ds}\Big|_{s=t}$

Tw. Niech $\varphi_t : U \to M$ lokalny przepływ na $U \subset M$ oraz $f: M \to N$ dyfeomorfizm. Wtedy $\psi_t = f \circ \varphi_t \circ f^{-1}$ jest lokalnym przepływem na $V = f(U) \subset N$ oraz jeżeli φ_t indukuje pole X na U to ψ_t indukuje pole $f_* X$ na V gdzie $f_* X$ to obraz pola X.

Dowód.: $V = f(U)$ – otwarty bo U – otwarty oraz f – dyfeomorfizm, ψ_t – dyfeomorfizm bo jest złożeniem dyfeomorfizmów

$\psi_0(y) = (f \circ \varphi_0 \circ f^{-1})(y) = (f \circ f^{-1})(y) = y$ $\quad (\psi_t \circ \psi_s) = (f \circ \varphi_t \circ f^{-1}) \circ (f \circ \varphi_s \circ f^{-1}) = f \circ \varphi_t \circ \varphi_s \circ f^{-1} =$

$= f \circ \varphi_{t+s} \circ f^{-1} = \psi_{t+s}$

Niech Y będzie polem indukowanym na V przez przepływ ψ_t.

Wtedy $\forall\, y \in V \quad Y_y = [t \mapsto \psi_t(y) = (f \circ \varphi_t \circ f^{-1})(y)]$. Z definicji $d_{f^{-1}(y)} f(\dot\gamma(0))$ gdzie $\gamma(t) = \varphi_t(f^{-1}(y))$

Stąd $\dot\gamma(0) = X_{f^{-1}(y)}$ czyli $Y_y = d_{f^{-1}(y)} f(X_{f^{-1}(y)}) = (f_* X)_y$ ■

Tw. Niech $X \in \mathfrak{X}(M)$, $x \in M$. Istnieje dokładnie jeden przepływ φ_t na otoczeniu U punktu x indukujący na U pole $X|_U$.
Jednoznaczność oznacza, że jeżeli φ_t, ψ_t są dwoma przepływami indukującymi pole X określonymi na $(-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times U_1$ oraz $(-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \times U_2$ odpowiednio to $\varphi|_{(-\varepsilon,\varepsilon)\times U} = \psi|_{(-\varepsilon,\varepsilon)\times U}$ gdzie $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ i $U = U_1 \cap U_2$

Dowód.: Niech (U, φ) będzie mapą na M taką, że $\varphi(x) = 0$. Można ograniczyć się do U, gdyż szukamy przepływu lokalnego. Używając dyfeomorfizmu $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ na podstawie poprzedniego twierdzenia można założyć, że pole X jest określone na podzbiorze otwartym $\mathbb{R}^m$. Wtedy pole $X = \sum_{i=1}^m X^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$. A przepływ jest określony przez r. r.

$$(*) \quad \frac{d\varphi_t^i(x)}{dt} = X^i(\varphi_t(x))$$ z warunkami początkowymi $\varphi_0^i(x) = x^i$ $(**)$

Z tw. o istnieniu i gładkiej zależności o warunkach początkowym rozwiązania równania różniczkowego otrzymujemy odwzorowanie $(-\varepsilon, \varepsilon) \times U \ni (t, x) \mapsto \varphi_t(x) \in \mathbb{R}^m$ gładkie takie, że φ_t jest dyfeomorfizmem na obraz dla dostatecznie małych t, gdzie $t \mapsto \varphi_t(x)$ jest rozwiązaniem r. r. $(*)$ z warunkiem $(**)$.

Sprawdźmy czy dla dostatecznie małych t, s $\varphi_t(\varphi_s(x)) = \varphi_{t+s}(x)$. Niech $\gamma_1(t) = \varphi_t(\varphi_s(x))$ i $\gamma_2(t) = \varphi_{t+s}(x)$
Obie krzywe spełniają równanie $(*)$ z warunkiem $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = \varphi_s(x)$. Stąd wynika, że $\varphi_t(\varphi_s(x)) = \varphi_{t+s}(x)$ na podstawie jednoznaczności rozwiązania zag. Cauchy'ego.

Niech φ_t, ψ_t będą dwoma przepływami określonymi na $(-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times U_1$ i $(-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \times U_2$ odpowiednio. Niech $x_0 \in U_1 \cap U_2$. Dla małych t $\varphi_t(x) = \psi_t(x)$ z jednoznaczności rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego. Załóżmy, że istnieje takie $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ gdzie $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ takie, że $\varphi_t(x) \neq \psi_t(x)$. Niech $t > 0$ (dla $t < 0$ tak samo). $t_0 \overset{def}{=} \inf\{t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \mid \varphi_t(x) \neq \psi_t(x)\}$.

Zbiór $\{t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \mid \varphi_t(x) \neq \psi_t(x)\}$ jest otwarty $\Rightarrow$ $\varphi_{t_0}(x) = \psi_{t_0}(x)$. Krzywe $t \mapsto \varphi_{t_0+t}(x)$ i $t \mapsto \psi_{t_0+t}(x)$ spełniają $(*)$ z tym samym warunkiem początkowym dla $t=0$. Stąd są one równe w pewnym otoczeniu $t=0$. Sprzeczność z definicją t_0 ■

Def.
Pole X na M nazywamy zupełnym jeżeli jest indukowane przez przepływ globalny.

Def.
Nośnikiem pola wektorowego X nazywamy zbiór $\operatorname{supp} X = \overline{\{x \in X \mid X(x) \neq 0\}}$

Tw. Jeżeli nośnik gładkiego pola wektorowego X jest zwarty to X jest polem zupełnym. W szczególności gładkie pole wektorowe na zwartej rozmaitości gładkiej jest zupełne.

Dowód: $\forall x \in M$ $\exists V \ni x$ otwarty w M $\exists \varphi_t : (-\varepsilon, \varepsilon) \times V \to M$ lokalny przepływ pola X. Nośnik $\operatorname{supp} X$ jest zwarty. Stąd istnieje skończona liczba lokalnych przepływów $\varphi_t^{(i)} : (-\varepsilon_i, \varepsilon_i) \times U_i \to M$ dla $i = 1, \ldots, k$ pola X takich, że $\operatorname{supp} X \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i$.
Niech $\varphi^{(0)} : \mathbb{R} \times (M \setminus \operatorname{supp} X) \ni (t, x) \mapsto x \in M \setminus \operatorname{supp} X$. Pole indukowane przez przepływ $\varphi_t^{(0)}$ to $X|_{M - \operatorname{supp} X} = 0$
Niech $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$. Lokalnie przepływy $\varphi^{(i)}$ i $\varphi^{(j)}$ dla $i, j = 0, 1, \ldots, k$ zgadzają się na spójnej części ich dziedzin.
Niech $\overline{\varphi} : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \to M$ $\quad \varphi(t, x) = \varphi_t^{(i)}(x)$ dla $x \in U_i$ i $\varphi(t, x) = \varphi^{(0)}(t, x)$ dla $x \in M \setminus \operatorname{supp} X$
Rozszerzamy $\overline{\varphi}$ z $(-\varepsilon, \varepsilon) \times M$ na $\mathbb{R} \times M$ następująco: niech $t \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ t, że $\left|\frac{t}{n}\right| < \varepsilon$. Definiujemy
$\varphi(t, x) = (\underbrace{\overline{\varphi}_{\frac{t}{n}} \circ \ldots \circ \overline{\varphi}_{\frac{t}{n}}}_{n\text{-razy}})(x)$. Pokażemy, że definicja nie zależy od wyboru n. Niech $n, m \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\left|\frac{t}{n}\right| < \varepsilon \quad \text{i} \quad \left|\frac{t}{m}\right| < \varepsilon \qquad \overline{\varphi}\left(\frac{t}{n}, x\right) = (\underbrace{\overline{\varphi}_{\frac{t}{nm}} \circ \ldots \circ \overline{\varphi}_{\frac{t}{nm}}}_{m\text{-razy}})(x) \qquad \overline{\varphi}\left(\frac{t}{m}, x\right) = (\underbrace{\varphi_{\frac{t}{nm}} \circ \ldots \circ \varphi_{\frac{t}{nm}}}_{n\text{-razy}})(x)$$

$$\varphi(t,x) = (\underbrace{\overline{\varphi}_{\frac{t}{n}} \circ \ldots \circ \overline{\varphi}_{\frac{t}{n}}}_{n\text{-razy}})(x) = (\underbrace{\underbrace{\overline{\varphi}_{\frac{t}{nm}} \circ \ldots \circ \overline{\varphi}_{\frac{t}{nm}}}_{m\text{-razy}} \circ \ldots \circ \underbrace{\overline{\varphi}_{\frac{t}{nm}} \circ \ldots \circ \overline{\varphi}_{\frac{t}{nm}}}_{m\text{-razy}}}_{m\cdot n\text{-razy}})(x) = (\underbrace{\overline{\varphi}_{\frac{t}{m}} \circ \ldots \circ \overline{\varphi}_{\frac{t}{m}}}_{m\text{-razy}})(x) = \varphi(t,x).$$

Stąd definicja $\varphi(t,x)$ nie zależy od wyboru n ■

Lemat.
Niech $f : (-\varepsilon,\varepsilon)\times M \to \mathbb{R}$ funkcja gładka taka, że $\forall\, x\in M$ $f(0,x)=0$ to $\exists\, g:(-\varepsilon,\varepsilon)\times M\to\mathbb{R}$ funkcja gładka taka, że $f(t,x) = t\,g(t,x)$ i $\dot f(0,x) = g(0,x)$, gdzie $\dot f(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} g(t,x)$

Dowód.: Niech $g(t,x) = \int_0^1 \dot f(ts,x)\,ds$, $t\,g(t,x) = \int_0^1 t\,\dot f(ts,x)\,ds = \int_0^1 \frac{d}{ds} f(ts,x)\,ds = f(t,x) - f(0,x) = f(t,x)$

$g(0,x) = \int_0^1 \dot f(0,x)\,ds = \dot f(0,x)$ ■

Lemat. Niech X będzie gładkim polem wektorowym na M i niech φ_t będzie jego lokalnym przepływem określonym na $(-\varepsilon,\varepsilon)\times U$. Wtedy $\forall\ \lambda\in C^\infty(U)$ $\exists\, g_t \in C^\infty((-\varepsilon,\varepsilon)\times U)$ taka, że $\lambda(\varphi_t(x)) = \lambda(x) + t\,g_t(x)$ i $X\lambda = g_0$

Dowód.: Niech $f(t,x) = \lambda(\varphi_t(x)) - \lambda(x)$. Wtedy $f(0,x) = \lambda(\varphi_0(x)) - \lambda(x) = \lambda(x)-\lambda(x) = 0$. Stąd na podstawie poprzedniego lematu $\exists\, g\in C^\infty((-\varepsilon,\varepsilon)\times M)$ taka, że $t\,g_t(x) = f(t,x)$ oraz $\dot f(0,x) = g(0,x)$

$\lambda(\varphi_t(x)) - \lambda(x) = f(t,x) = t\,g_t(x)$ $\quad X_x(\lambda) = \frac{d}{dt}(\lambda(\varphi_t(x)))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\lambda(x) + t\,g_t(x))\Big|_{t=0} = (g_t(x) + t\frac{d}{dt}g_t(x))\Big|_{t=0} =$

$= g_0(x)$ ■

Tw. Niech $X, Y\in\mathfrak{X}(M)$ i φ_t - przepływ lokalny pola X na U to $\forall\, x\in U$ $[X,Y]_x = -\frac{d}{dt}((\varphi_t)_* Y)_x\Big|_{t=0}$

Dowód.: Niech $\lambda\in C^\infty(U)$ i $\lambda(\varphi_t(x)) = \lambda(x) + t\,g_t(x)$ zgodnie z poprzednim lematem oraz $X(\lambda) = g_0(x)$

Wtedy $((\varphi_t)_* Y)_x(\lambda) = Y_{\varphi_{-t}(x)}(\lambda\circ\varphi_t) = Y_{\varphi_{-t}(x)}(\lambda) + t\,Y_{\varphi_{-t}(x)}(g_t)$

$$-\frac{d}{dt}\left((\varphi_t)_* Y\right)_x(\lambda)\Big|_{t=0} = -\frac{d}{dt}\left(Y_{\varphi_{-t}(x)}(\lambda) + t\, Y_{\varphi_{-t}(x)}(g_t)\right)\Big|_{t=0} = -\frac{d}{dt}\left(Y_{\varphi_{-t}(x)}(\lambda)\right)\Big|_{t=0} - Y_{\varphi_0(x)}(g_0) - 0\cdot\frac{d}{dt}\left(Y_{\varphi_{-t}(x)}(g_t)\right)\Big|_{t=0} =$$

$$= X_x(Y(\lambda)) - Y_x(g_0) = X_x(Y(\lambda)) - Y_x(X(\lambda)) = [X,Y]_x(\lambda) \quad \blacksquare$$

Wniosek. Niech φ_t będzie lokalnym przepływem pola X w otoczeniu U punktu x_0 to $\forall\, Y \in \mathfrak{X}(M)$ $\forall\, x \in U$ i $\forall\, s$ - dostatecznie małego mamy $\left((\varphi_s)_*[X,Y]\right)_x = -\frac{d}{dt}\left((\varphi_t)_* Y\right)_x\Big|_{t=s}$

Dowód.: $\varphi_s^{-1}(x) = \varphi_{-s}(x)$ Stąd $\left((\varphi_s)_*[X,Y]\right)_x = d_{\varphi_{-s}(x)}\varphi_s\left([X,Y]_{\varphi_{-s}(x)}\right) = d_{\varphi_{-s}(x)}\varphi_s\left(-\frac{d}{dt}\left(((\varphi_t)_* Y)_{\varphi_{-s}(x)}\right)\Big|_{t=0}\right) =$

$$= -\frac{d}{dt}\left((\varphi_s)_*(\varphi_t)_* Y\right)_x\Big|_{t=0} = -\frac{d}{dt}\left((\varphi_{s+t})_* Y\right)_x\Big|_{t=0} = -\frac{d}{dt}\left((\varphi_t)_* Y\right)_x\Big|_{t=s} \quad \blacksquare$$

Def. Niech $f: M \to M$ będzie dyfeomorfizmem. Pole X na M jest f-niezmiennicze jeżeli $f_* X = X$.

Tw. Niech $f: M \to M$ będzie dyfeomorfizmem. Pole X jest f-niezmiennicze $\Leftrightarrow$ $\forall\, x \in M$ lokalne przepływy φ_t pola X zdefiniowane w otoczeniu punktu x i ψ_t pola Y w otoczeniu punktu $f(x)$ spełniają warunek $f \circ \varphi_t = \psi_t \circ f$.

Dowód.: Lokalnym przepływem pola $f_* X$ jest $f \circ \varphi_t \circ f^{-1}$ w otoczeniu punktu $f(x)$. Stąd wynika teza. $\blacksquare$

Tw. Niech $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Wtedy $[X,Y] = 0 \Leftrightarrow \forall\, x \in M$ przepływy lokalne φ_t pola X i ψ_t pola Y w otoczeniu punktu x dla dostatecznie małych t i s zachodzi $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$.

Dowód.: Jeśli $[X,Y] = 0 \Rightarrow \forall\, x \in M$ $\forall\, s$ dostatecznie małego $\frac{d}{dt}\left(((\varphi_t)_* Y)_x\right)\Big|_{t=s} = 0$. $\forall\, x \in M$ funkcja $t \mapsto ((\varphi_t)_* Y)_x$ jest stała czyli $((\varphi_t)_* Y)_x = ((\varphi_0)_* Y)_x = Y_x$. Zatem pole Y jest φ_t-niezmiennicze. Stąd na podstawie poprz. tw. $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$ $\blacksquare$

Tw. Niech $(X_1, \dots, X_m)$ będzie lokalną bazą gładkich pól wektorowych w otoczeniu punktu $x_0 \in M$ i niech $\varphi_t^{(i)}$ będzie lokalnym przepływem pola X_i w otoczeniu x_0. Wtedy $\exists\, \varepsilon > 0$ i przekształcenie $\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon)^m \ni (t_1, \dots, t_m) \mapsto (\varphi^{(1)}_{t_1} \circ \dots \circ \varphi^{(m)}_{t_m})(x_0)$ jest dyfeomorfizmem kostki $(-\varepsilon, \varepsilon)^m$ na otwarte otoczenie punktu x_0 oraz $\Phi(0, \dots, 0) = x_0$ $d_{(r_1, \dots, r_m)} \Phi\left(\frac{\partial}{\partial t_1}\Big|_{(r_1, \dots, r_m)}\right) = X_1(\Phi(r_1, \dots, r_m))$ gdzie $\frac{\partial}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial t_m}$ oznacza kanoniczny reper na kostce $(-\varepsilon, \varepsilon)^m$.

Dowód: $\exists\, \varepsilon > 0$ Φ jest dobrze określonym przekształceniem gładkim na $(-\varepsilon, \varepsilon)^m$. Oczywiście $\Phi(0, \dots, 0) = x_0$.

$\frac{\partial}{\partial t_1}\Big|_{(r_1, \dots, r_m)}$ jest wektorem prędkości krzywej $t \mapsto (r_1 + s, r_2, \dots, r_m)$ w $s = 0$. Wtedy

$$d_{(r_1, \dots, r_m)} \Phi\left(\frac{\partial}{\partial t_1}\Big|_{(r_1, \dots, r_m)}\right) = d_{(r_1, \dots, r_m)} \Phi\big([s \mapsto (r_1 + s, r_2, \dots, r_m)]\big) = [s \mapsto \Phi(r_1 + s, r_2, \dots, r_m)] = [s \to \varphi^{(1)}_{r_1+s} \circ \varphi^{(2)}_{r_2} \circ \dots \circ \varphi^{(m)}_{t_m}(x_0)]$$

$$= [s \mapsto \varphi^{(1)}_s \circ \varphi^{(1)}_{r_1} \circ \varphi^{(2)}_{r_2} \circ \dots \circ \varphi^{(m)}_{r_m}(x_0)] = [s \mapsto \varphi^{(1)}_s(\Phi(r_1, \dots, r_m))] = X_1(\Phi(r_1, \dots, r_m))$$

Wektor $\frac{\partial}{\partial t_i}\Big|_{(0, \dots, 0)}$ jest wektorem prędkości krzywej $s \mapsto (0, \dots, 0, \overset{i}{s}, 0, \dots, 0)$ w $s = 0$ dla $i = 1, \dots, m$

Stąd $d_{(0, \dots, 0)} \Phi\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\Big|_{(0, \dots, 0)}\right) = d_0 \Phi([s \mapsto (0, \dots, 0, s, 0, \dots, 0)]) = [s \mapsto \Phi(0, \dots, 0, s, 0, \dots, 0)] = [s \mapsto \varphi^{(i)}_s(x_0)] = X_i(x_0)$

Stąd wynika, że $d_0 \Phi$ przekształca bazę na bazę więc jest izomorfizmem. Stąd Φ jest lokalnym dyfeomorfizmem ■

Wniosek. Jeżeli X jest gładkim polem wektorowym na M takim, że $X|_{x_0} \neq 0$ dla pewnego $x_0 \in M$ to $\exists$ mapa (U, φ) w otoczeniu x_0 taka, że $\partial_1 = X|_U$.

Dowód. $X|_{x_0} \neq 0 \Rightarrow \exists\, (X_1, \dots, X_m)$ lokalna baza gładkich pól wektorowych taka, że $X_1 = X$ w pewnym otoczeniu x_0.

Niech Φ będzie dyfeomorfizmem z poprzedniego tw. dla lokalnej bazy $(X_1, \dots, X_m)$. Stąd (U, Φ^{-1}) jest mapą w otoczeniu x_0. Ze wzoru z pop. tw. mamy $\partial_1 = X_1 = X|_U$.

Tw. Niech $(X_1, \dots, X_m)$ lokalna baza gładkich pól wektorowych w otoczeniu $x_0 \in M$ taka, że $[X_i, X_j] = 0$ dla $i, j = 1, \dots, m$ to $\exists$ mapa (U, φ) na M taka, że $\varphi(x_0) = 0$ oraz $X_i = \partial_i$ na U dla $i = 1, \dots, m$ oraz $\partial_1, \dots, \partial_m$ jest kanonicznym reperem wyznaczonym przez mapę (U, φ)

Dowód: Niech $\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon)^m \to M$ będzie lokalnym dyfeomorfizmem na obraz z pop. Tw. dla bazy lokalnej $(X_1, \dots, X_m)$. Rozważmy mapę (U, Φ^{-1}). Z wniosku otrzymujemy $X_1 = \partial_1$. Na podstawie Tw. o komutacji przepływów dla $[X_i, X_j] = 0$ otrzymujemy, że w definicji Φ możemy postawić $\varphi_t^{(i)}$ na pierwszej pozycji, co oznacza, że $X_i = \partial_i$ dla $i = 1, \dots, m$ na U. ∎