Wojciech Domitrz : Geometria rozmaitości Riemanna, wykład 6

Def.
Dystrybucją rzędu r na M nazywamy rodzinę podprzestrzeni $D := \{D_p \subset T_pM \mid p \in M\}$ taką, że $\forall\, p \in M \ \exists\, U$ otoczenie p w M oraz $\exists\, X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{X}(U)$ takie, że $\forall\, q \in U$ wektory $X_1|_q, \dots, X_r|_q$ są bazą D_q.

Przykład 1) $M = \mathbb{R}^3$ $D_x = \mathrm{span}\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_x, \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_x \right\}$ rank $D = 2$
2) $M = \mathbb{R}^3$ $D_x = \mathrm{span}\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_x \right\}$ rank $D = 1$
3) $M = \mathbb{R}^3$ $D_x = \mathrm{span}\left\{ \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_x, \frac{\partial}{\partial x_3}\Big|_x - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_x \right\}$ rank $D = 2$

Def.
Rozmaitością całkową dystrybucji D nazywamy podrozmaitość regularną P rozmaitości M taką, że $\forall\, p \in P$ $T_pP = D|_p$.

Def.
Dystrybucja jest **całkowalna** jeśli $\forall\, p \in M \ \exists\, P$ - podrozmaitość całkowa D taka, że $p \in P$.

Przykład 1) $M = \mathbb{R}^3$ $D_x = \mathrm{span}\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_x, \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_x \right\}$ $x^\circ = (x_1^\circ, x_2^\circ, x_3^\circ) \in \mathbb{R}^3$ $P = \{(x_1, x_2, x_3^\circ) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$
2) $M = \mathbb{R}^3$ $D_x = \mathrm{span}\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_x \right\}$ $x^\circ = (x_1^\circ, x_2^\circ, x_3^\circ) \in \mathbb{R}^3$ $P = \{(x_1, x_2^\circ, x_3^\circ) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$

Def. Dystrybucja jest **inwolutywna** jeśli $\forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ $\forall\, p \in M$ $X|_p, Y|_p \in D_p \Rightarrow [X,Y]|_p \in D_p$

Przykład: 1) $M = \mathbb{R}^3$
$$\left[f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, g_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + g_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right] = f_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + f_1 \frac{\partial g_2}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2} + f_2 \frac{\partial g_1}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_2} - g_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} - g_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2} - g_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_1} - g_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}$$
Stąd $X, Y \in D_x$ $[X,Y] \in D_x$
2) $M = \mathbb{R}^3$ $\left[f \frac{\partial}{\partial x_1}, g \frac{\partial}{\partial x_1}\right] = f \frac{\partial g}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} - g \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} = \left(f \frac{\partial g}{\partial x_1} - g \frac{\partial f}{\partial x_1}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}$ $X, Y \in D \Rightarrow [X,Y] \in D$ D jest inwolutywna
3) $M = \mathbb{R}^3$ $D_x = \mathrm{span}\left\{ \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_x, \frac{\partial}{\partial x_3}\Big|_x - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_x \right\}$ $\left[\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\right] = -\frac{\partial}{\partial x_1} \notin D$ D nie jest inwolutywna

Stw. Każda dystrybucja całkowalna jest inwolutywna.
Dowód.: Niech $p \in M$. Niech P będzie podrozmaitością całkową dystrybucji D taką, że $p \in P$. Wtedy $D_q = T_qP$ dla $\forall\, q \in P$.
Niech $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ takie że $\forall\, q \in M$ $X|_q, Y|_q \in D_q$. Wtedy $\forall\, q \in P$ $X_q, Y_q \in T_qP$ stąd $X|_P, Y|_P \in \mathfrak{X}(P)$
P - jest podrozmaitością regularną. Stąd $\forall\, q \in P$ $[X,Y]_q \in T_qP$ czyli $[X,Y]_p \in T_pP = D_p$ ∎

Tw. Frobeniusa.

Niech D będzie dystrybucją inwolutywną rzędu r na M. Wtedy $\forall p \in M$ $\exists (U, \varphi)$ – mapa na M taka, że $p \in U$ oraz $\forall q \in U$ $D_q = span\{\partial_1|_q, \dots, \partial_r|_q\}$. W szczególności $P = \{q \in U : \varphi_j(q) = \varphi_j(p)$ dla $j = r+1, \dots, m\}$ jest rozmaitością całkową D przechodzącą przez p czyli D jest całkowalna.

Dowód: Twierdzenie ma charakter lokalny więc można założyć, że $M = \mathbb{R}^m$, $p = 0$ i $(x_1, \dots, x_m)$ jest układem współrzędnych. Niech $X_1, \dots, X_r$ będą polami na $\mathbb{R}^m$ rozpinającymi D. Z tw z poprzedniego wykładu można założyć, że $X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$. Teza jest więc prawdziwa dla $r = 1$. Przeprowadzimy dowód indukcyjny twierdzenia ze względu na rząd dystrybucji r. Zał, że tw. jest prawdziwe dla każdego inwolutywnej dystrybucji rzędu $r-1$. Niech D ma rząd r. Wprowadzimy nowe pole rozpinające D określone wzorami: $V_1 = X_1$, $V_i = X_i - (X_i x_1) X_1$ dla $i = 2, 3, \dots, r$. Z tego otrzymujemy, że $V_i x_1 = \delta_{i1}$ dla $i = 1, 2, \dots, r$. $[V_i, V_j] = \sum_{l=1}^{r} a_{ij}^l V_l$ dla pewnych $a_{ij}^l \in C^\infty(M)$ $l, i, j = 1, \dots, r$.

Niech $P = \{x \in M \mid x_1 = 0\}$. Pola $V_2, \dots, V_r$ są styczne do P, gdyż $V_i x_1 = 0$ dla $i = 2, \dots, r$. Więc generują one dystrybucję $gen(V_2, \dots, V_r)$ rzędu $(r-1)$ na P. $[V_i, V_j] x_1 = \sum_{l=1}^{r} a_{ij}^l (V_l x_1) = a_{ij}^1$ dla $i, j = 2, \dots, r$. $[V_i, V_j] x_1 = 0$ bo pola V_i, V_j dla $i, j = 2, \dots, r$ są styczne do P więc $[V_i, V_j]$ jest styczny do P. Zatem funkcja a_{ij}^1 znika na P. Zatem $[V_i, V_j]_q = \sum_{l=2}^{r} a_{ij}^l(q) V_l|_q$ dla $\forall q \in P$ czyli $D|_P$ jest inwolutywna. Na podstawie założenia indukcyjnego istnieje w otoczeniu $p = 0 \in P$ lokalny układ współrzędnych $y_2, y_3, \dots, y_m$ taki, że $\frac{\partial}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_r}$ rozpinają $D|_P$. Pola $\frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial y_3}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_r}$ znikają na funkcjach y_j dla $j \geq r+1$. Stąd pola wektorowe styczne do $D|_P$ znikają na funkcjach y_j dla $j \geq r+1$. W szczególności $V_i y_j = 0$ dla $i = 2, \dots, r$ i $j = r+1, \dots, m$. Rozpatrzmy w otoczeniu $0 \in \mathbb{R}^m$ rzut $(x_2, \dots, x_m)$ punktu $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ na podrozmaitość P oraz funkcje $u_i(x_1, \dots, x_m)$ dla $i = 1, \dots, m$ określone wzorami

$u_1 = x_1 \quad u_i = y_i(x_2, \dots, x_m)$ dla $i = 2, \dots, m$. Wtedy $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 1 \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_1} = 0$ dla $i = 2, \dots, m$.

Stąd jakobian przekształcenia $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (u_1, \dots, u_m)$ jest równy jakobianowi przekształcenia $(x_2, \dots, x_m) \mapsto (y_2, \dots, y_m)$, który jest różny od 0, gdyż $(y_2, \dots, y_m)$ jest lokalnym układem współrzędnych na P. Stąd $(u_1, \dots, u_m)$ jest lokalnym układem współrzędnych w otoczeniu $0 \in \mathbb{R}^m$.

Pokażemy, że $V_i u_j = 0$ dla $i = 1, 2, \dots, r$, $j = r+1, \dots, m$ w otoczeniu $0 \in \mathbb{R}^m$. Zauważmy, że funkcje $(V_i u_j)(u_1, u_2, \dots, u_m)$ jako funkcje od u_1 przy ustalonych $(u_2, \dots, u_m)$ spełniają liniowy i jednorodny układ r.r.z. $\frac{\partial (V_1 u_j)}{\partial u_1} = 0$, $\frac{\partial (V_i u_j)}{\partial u_1} = \sum_{l=1}^{m} a_{1i}^{l} V_l u_j$ dla $i = 2, \dots, r$ z zerowym warunkiem początkowym w punkcie $u_1 = 0$.

Układ taki ma jedynie rozwiązanie zerowe.

Pierwsze równanie wynika z tego, że $V_1 = \frac{\partial}{\partial u_1}$ $\quad \frac{\partial u_j}{\partial u_1} = 0$. Pozostałe wynikają z tego, że

$$\frac{\partial}{\partial u_1}(V_i u_j) = \frac{\partial}{\partial u_1}(V_i u_j) - V_i \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial u_1} u_j\right)}_{=0} = \left[\frac{\partial}{\partial u_1}, V_i\right] u_j = [V_1, V_i] u_j = \left(\sum_{l=1}^{m} a_{1i}^{l} V_l\right) u_j$$

Należy pokazać, że funkcje $V_i u_j$ spełniają zerowy warunek początkowy. Dla $i = 1$ $\quad V_1 u_j = \frac{\partial}{\partial u_1} u_j = 0$

Dla $i = 2, \dots, r$ pole V_i jest styczne do P, $u_j|_P = y_j$. Stąd $V_i u_j = V_i y_j$ na P dla $i = 2, \dots, r$.

Ale pokazaliśmy, że $V_i y_j = 0$ dla $i = 2, \dots, r$ i $j = r+1, \dots, m$. Czyli pokazaliśmy, że $V_i u_j = 0$.

Stąd $V_i = \sum_{j=1}^{m} V_i x_j \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{r} V_i x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ dla $i=1,\dots,r$. Stąd wykazaliśmy, że dystrybucja D generowana przez pola $V_1,\dots,V_r$ jest zawarta w całkowalnej dystrybucji generowanej przez $\frac{\partial}{\partial y_1},\dots,\frac{\partial}{\partial y_r}$. Ale obie dystrybucje mają ten sam rząd czyli są równe. Stąd D jest całkowalna. $\blacksquare$