Geometria rozmaitości Riemanna

M – rozmaitość gładka

Def. Koneksją liniową lub pochodną kowariantną na M nazywamy przekształcenie

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \ni (X,Y) \longmapsto \nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$$

takie, że $\forall\ X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$ $\forall\ f,g \in C^\infty(M)$ $\forall\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}$

1) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

2) $\nabla_X(\alpha Y + \beta Z) = \alpha\nabla_X Y + \beta\nabla_X Z$

3) $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$

Przykład 1. $M = \mathbb{R}^m$ $(x_1,\dots,x_m)$ – układ współrzędnych na $\mathbb{R}^m$ $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ $i=1,\dots,m$

$f \in C^\infty(M)$ $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ $X = X^i\partial_i$ $Y = Y^j\partial_j$ $X(f) = X^i\partial_i f$

definiujemy $D_X Y = (X^i\partial_i Y^j)\partial_j \in \mathfrak{X}(M)$

Sprawdzić, że D jest koneksją liniową na $\mathbb{R}^m$.

2. $H = \{x \in \mathbb{R}^m \mid f = 0\}$ $\forall\ x \in H$ $df|_x \neq 0$

H – hiperpowierzchnia $\nabla f = (\partial_i f)\partial_i$ $N = \frac{1}{|\nabla f|}\nabla f$ – pole normalne do H $\underset{\overset{\shortparallel}{N\cdot N}}{|N|} = 1$

$X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ styczne do H tzn. $df(X) = gf$, $df(Y) = hf$ $N\cdot X = 0$

$D_X Y$ – nie musi być styczne do H $N\cdot Y = 0$

$(D_X Y)_x = Z + h\cdot N$ $Z \in T_x H$

$$D_X Y \cdot N = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{Z\cdot N} + h\,\underset{\overset{\shortparallel}{1}}{N\cdot N}$$

$$\nabla_X Y = D_X Y - (D_X Y\cdot N)N$$

$$h = D_X Y \cdot N$$

$$\nabla_X Y \cdot N = D_X Y\cdot N - (D_X Y\cdot N)\,N\cdot N = 0$$

Pokazać, że ∇ jest koneksją liniową na M

Tw.

Niech ∇ będzie koneksją liniową na M

1) $U \subset M$ otwarty $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ $X|_U = Y|_U \Rightarrow (\nabla_X Z)|_U = (\nabla_Y Z)|_U \wedge (\nabla_Z X)|_U = (\nabla_Z Y)|_U$

Dowód.: Koneksja jest liniowa ze względu na obie zmienne stąd wystarczy pokazać, że

$X|_U = 0 \Rightarrow \nabla_X Y|_U = 0$ i $\nabla_Y X|_U = 0$

Niech $p \in U$. Istnieje $f \in C^\infty(M)$ $f(p) = 1$ i $\operatorname{supp} f \subset U$

$f \cdot X \equiv 0$ $\quad 0 = \nabla_0 Y = \nabla_{f \cdot X} Y = f(\nabla_X Y)$

$$0 = (f \cdot (\nabla_X Y))|_p = f(p)(\nabla_X Y)_p = (\nabla_X Y)_p \qquad (\nabla_X Y)_p = 0$$

$$0 = \nabla_Y 0 = \nabla_Y (f \cdot X) = Y(f) X + f \nabla_Y X \quad 0 = \underbrace{Y(f)|_p}_{} \underset{0}{\underset{\shortparallel}{X}}|_p + \underset{1}{\underset{\shortparallel}{f(p)}} (\nabla_Y X)|_p = (\nabla_Y X)|_p \qquad (\nabla_Y X)|_p = 0 \quad \blacksquare$$

$U \subseteq M$ otwarte

$X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ $\quad \tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(M)$ $\quad \tilde{X}|_U = X$ $\quad \tilde{Y}|_U = Y$

$p \in U$ $(\nabla_X Y)|_p \overset{def}{=} \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}|_p$

$\nabla : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to \mathfrak{X}(U)$

(U, φ) – mapa na M $\quad \partial_1, \dots, \partial_m$ - kanoniczny reper mapy (U, φ)

$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma^s_{ij} \partial_s$ $\quad \Gamma^s_{ij} \in C^\infty(U)$ $\quad \Gamma^s_{ij}$ - symbole Christoffela (współrzędne koneksji) tw. ∇ - koneksja liniowa na M, $p \in M$

$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

$\nabla_X Y|_p$ zależy tylko od $X|_p$ oraz od $Y|_{\gamma(t)}$, gdzie $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ krzywa gładka

t, że $\gamma(0) = p$ $\dot{\gamma}(0) = X|_p$.

Dowód.: (U, φ) - mapa $p \in U$ $\partial_1, \dots, \partial_m$ - kanoniczny reper mapy (U, φ)

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^s \partial_s \qquad X = X^i \partial_i \qquad Y = Y^j \partial_j$$

$$\nabla_X Y = \nabla_{X^i \partial_i}(Y^j \partial_j) = X^i \nabla_{\partial_i}(Y^j \partial_j) = X^i (\partial_i Y^j) \partial_j + X^i Y^j \nabla_{\partial_i} \partial_j = X^i (\partial_i Y^j) \partial_j + X^i Y^j \Gamma_{ij}^s \partial_s =$$
$$= X^i (\partial_i Y^s + Y^j \Gamma_{ij}^s) \partial_s$$

$$X^i \partial_i Y^s = X(Y^s) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} ((Y^s \circ \gamma)(t)) \qquad \gamma(0) = p \quad \dot{\gamma}(0) = X|_p$$

$$(\nabla_X Y)|_p = \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} ((Y^s \circ \gamma)(t)) + X^i|_p \, Y^j|_p \, \Gamma_{ij}^s(p) \right) \partial_s|_p$$

$(\nabla_X Y)_p$ zależy od $\underline{(Y^s \circ \gamma)(t)}$ $\quad \underline{X^i|_p}$ $\quad \underline{Y^j|_p = Y^j|_{\gamma(0)}}$

$T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \ni (X,Y) \mapsto T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \in \mathfrak{X}(M)$ tensor torsji lub skręcenia

$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \ni (X,Y,Z) \mapsto R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$ – tensor krzywizny

Lemat. T jest tensorem typu $(1,2)$

R jest tensorem typu $(1,3)$

$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ustalone wtedy $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \ni Z \to R(X,Y)Z \in \mathfrak{X}(M)$ jest tensorem typu $(1,1)$

$R(X,Y)$ nazywamy transformacją krzywiznową.

Tw. 1) Jeżeli $\nabla, \tilde{\nabla}$ koneksje liniowe na M to $S(X,Y) = \nabla_X Y - \tilde{\nabla}_X Y$ jest tensorem typu $(1,2)$

2) Jeżeli ∇ koneksja liniowa na M, S – tensor typu $(1,2)$ na M to $\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + S(X,Y)$ jest koneksją liniową na M.

Dowód 1) np. $S(X, fY) = \nabla_X (fY) - \hat{\nabla}_X (fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y - (Xf)Y - f\hat{\nabla}_X Y =$

$= f(\nabla_X Y - \hat{\nabla}_X Y) = f\, S(X,Y)$

2) np. $\hat{\nabla}_X (fY) = \nabla_X (fY) + S(X, fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y + f\, S(X,Y) = (Xf)Y + f(\nabla_X Y + S(X,Y)) =$

$= (Xf)Y + f\hat{\nabla}_X Y$

$S(X,Y)$ – nazywamy tensorem deformacji.

zał. ∇ - koneksja liniowa na M, $p \in M$, $X, Y \in T_x M$

$T_p M \ni Z \to R(Z, X)Y \in T_p M$ endomorfizm liniowy

$Ric(X, Y) = tr(Z \to R(Z, X)Y)$

$Ric : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ – tensor Ricciego koneksji ∇

Tw. Ric jest tensorem typu $(0, 2)$

Tw. $T(\partial_i, \partial_j) = T_{ij}^k \partial_k$ $\quad R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = R_{kij}^s \partial_s$ $\quad S(\partial_i, \partial_j) = S_{ij}^k \partial_k$

$Ric(\partial_i, \partial_j) = Ric_{ij}$

Wtedy:

$$T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k \qquad R_{kij}^s = \partial_i \Gamma_{jk}^s - \partial_j \Gamma_{ik}^s + \Gamma_{jk}^p \Gamma_{ip}^s - \Gamma_{ik}^p \Gamma_{jp}^s$$

$$S_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^k - \Gamma_{ij}^k \qquad Ric_{ij} = R_{jpi}^p$$

Def. Koneksję nazywamy płaską jeżeli $T = 0$ $R = 0$

Wniosek. Koneksja na dowolnej rozmaitości wymiaru 1 jest płaska

Przykład. $D_X Y$ na $\mathbb{R}^m$ jest płaska.