



# Leonhard Euler

Matematyk wszechczasów

Krótki kurs historii matematyki 2024/2025Z  
Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych  
Politechnika Warszawska

Amelia Ulatowska,  
Alicja Żebiałowicz

---

# Agenda

1. Dzieciństwo i młodość
2. Praca naukowa
3. Życie w Petersburgu i Berlinie
4. Wkład w matematykę i fizykę
5. Dziedzictwo





## KWIECIEŃ 1707

Pn	Wt	Śr	Cz	Pt	So	N
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	

# Dzieciństwo i młodość

- Urodzony 15 kwietnia 1707 w Bazylei, w rodzinie pastora.
- Mentor: Johann Bernoulli, wybitny matematyk, który odkrył jego talent.
- Studia na Uniwersytecie Bazylejskim od 13. roku życia.
- Wczesne prace naukowe przyniosły mu uznanie w całej Europie.







## Rozprawa doktorska - *De Sono*

- Leonhard Euler analizował naturę dźwięku i sposób rozchodzenia się fal akustycznych w różnych ośrodkach.
- Praca ta była jednym z pierwszych przykładów zastosowania matematyki do opisu zjawisk fizycznych.

# Życie w Petersburgu

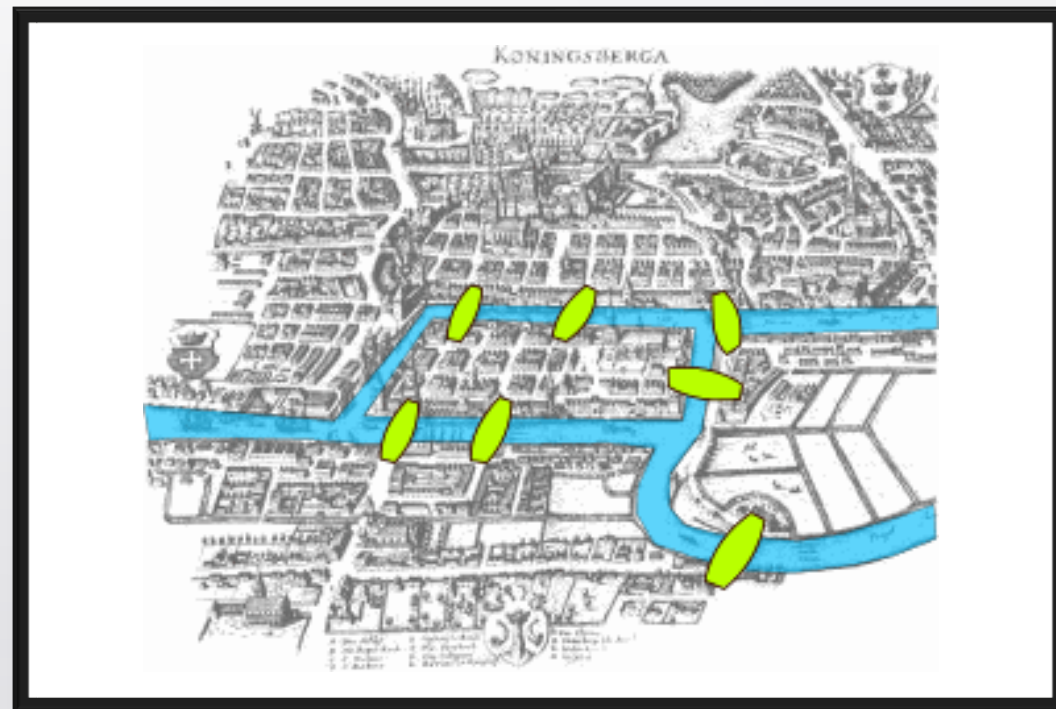
- Rozpoczął pracę w Akademii Nauk, początkowo na wydziale medycznym, później na matematycznym.
- Współpracował z Danielem Bernoullim, doskonaląc swoje umiejętności i prowadząc badania.
- Po śmierci Katarzyny I zmniejszono finansowanie Akademii, ale Euler awansował na profesora fizyki (1731) i kierownika wydziału matematyki (1733).
- W 1734 roku poślubił Katarzynę Gsell. Mieli 13 dzieci, z których pięcioro dożyło dorosłości.



# Problem mostów Królewieckich

- Czy możliwe jest przejście przez wszystkie mosty Królewca, przekraczając każdy dokładnie raz?
- Rozwiązanie tego problemu przez Eulera zapoczątkowało rozwój teorii grafów i topologii.
- Wyniki zostały przedstawione w pracy „*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*” w 1741 roku.

Po lewej: Mapa Królewca z czasów Eulera ukazuje ówczesny układ siedmiu mostów (kolorami zaznaczone: mosty na Pregole i sama rzeka)





# Problem Bazylejski

- W XVII wieku wielu wybitnych matematyków, w tym bracia Bernoulli i Gottfried Wilhelm Leibniz, próbowano znaleźć wartość tego szeregu, ale bez powodzenia.
- Leonhard Euler jako pierwszy (w 1734 roku) wyznaczył sumę tego szeregu. Rozwiązanie to zostało opublikowane w 1740 roku w pracy „*De Summis Serierum Reciprocarum*”.
- Rozwiązanie problemu bazylejskiego było przełomem w analizie matematycznej, łącząc teorię liczb z geometrią i funkcjami trygonometrycznymi.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$



+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4
10	10	4	12	6	8	8	16	6	18	8
20	12	10	22	8	20	12	18	12	28	8
30	30	16	20	16	24	12	36	18	24	16
40	40	12	42	20	24	22	46	16	42	20
50	32	24	52	18	40	24	36	28	58	16
60	60	30	36	32	48	20	66	32	44	24
70	70	24	72	36	40	36	60	24	78	32
80	54	40	82	24	64	42	56	40	88	24
90	72	44	60	46	72	32	96	42	60	40

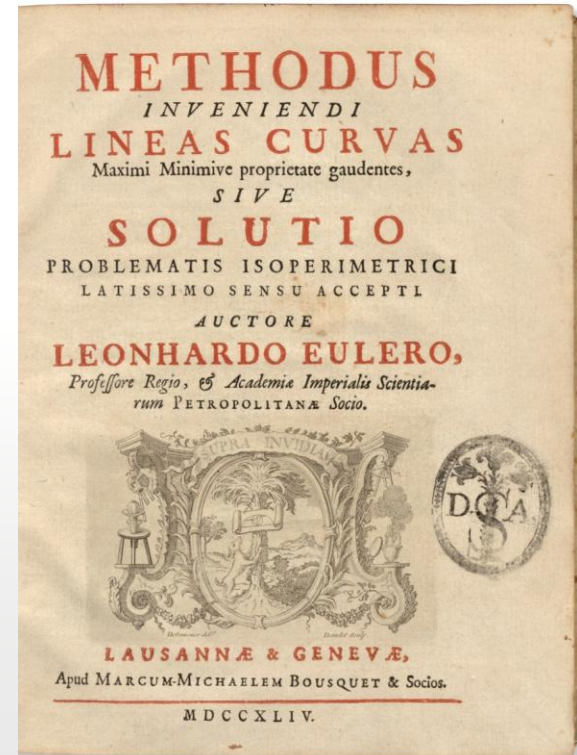


## Funkcja $\varphi$ – czyli czym jest *tocjent*

- Przypisuje każdej liczbie naturalnej  $n$  liczbę liczb naturalnych mniejszych lub równych  $n$ , które są z nią względnie pierwsze.
- Funkcja  $\varphi$  odgrywa kluczową rolę w teorii liczb, m.in. w twierdzeniu Eulera (ogólna postać małego twierdzenia Fermata).
- Ma istotne znaczenie w kryptografii, szczególnie w algorytmie RSA, gdzie *tocjent* jest wykorzystywany do generowania kluczy szyfrujących.

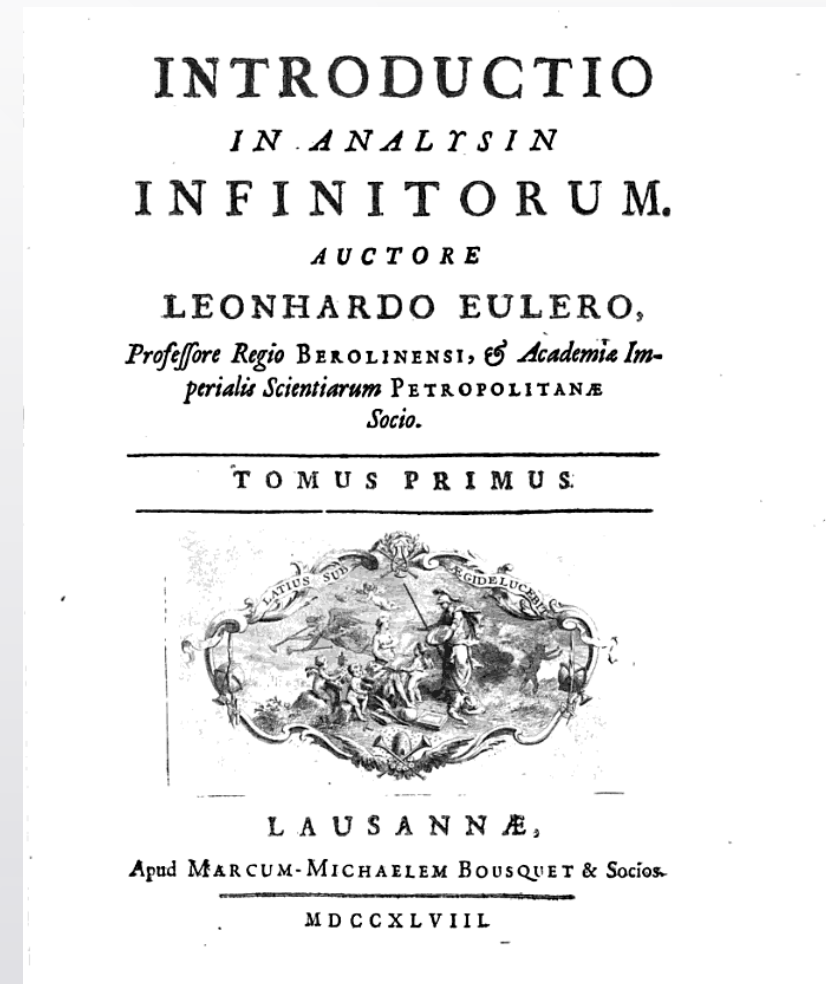
# Methodus inveniendi lineas curvas

- A raczej: *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti* (1744)
- Metoda znajdowania krzywych, które cieszą się własnością maksymalnej lub minimalnej, czyli rozwiązanie problemu izoperymetrycznego w jego najszerszym znaczeniu



# Introductio in analysin infinitorum

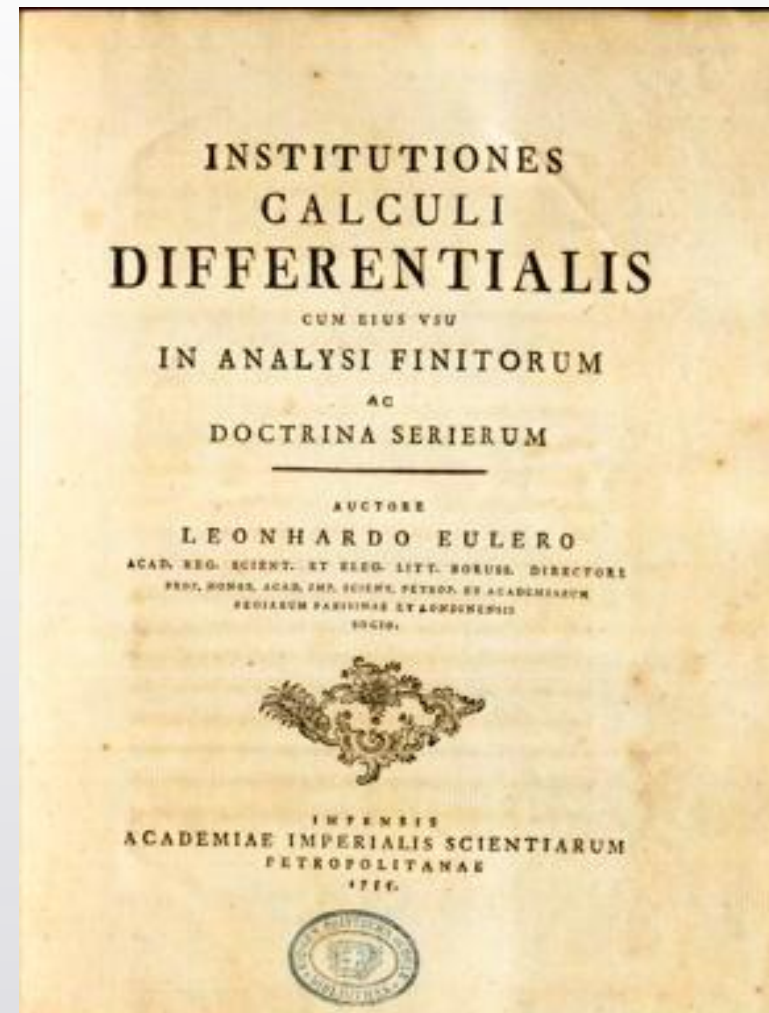
- Czyli po polsku:  
„Wprowadzenie do analizy nieskończoności”
- Opublikowane w 1748 roku
- Dotyczy:
  - wprowadzenia teorii funkcji jako kluczowego elementu analizy matematycznej,
  - rozwinięcia idei szeregów nieskończonych i ich zbieżności,
  - analizy wielomianów i ułamków łańcuchowych.





# *Institutiones calculi differentialis*

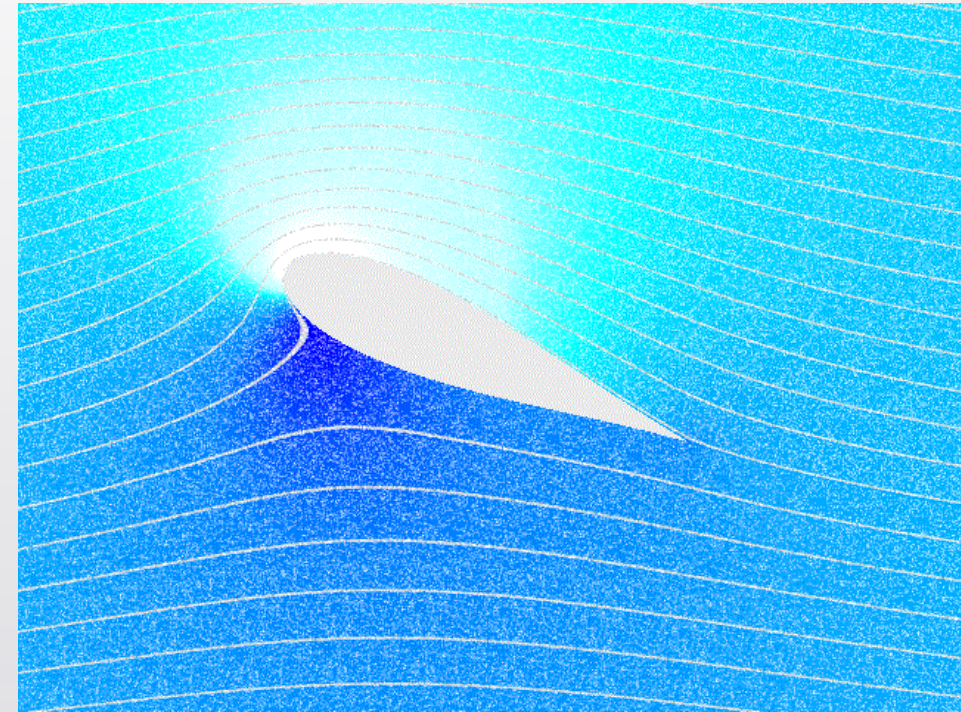
- Czyli po polsku:  
„Podstawy rachunku różniczkowego”
- Pierwsza publikacja: 1755 rok
- Podstawa nowoczesnego rachunku różniczkowego
- Wprowadzenie pojęcia pochodnej i jej zastosowań
- Systematyczne podejście do funkcji i ich własności



# Badania nad ruchem planet i rozwój mechaniki płynów

- Opracowanie równań ruchu planet w oparciu o prawo grawitacji Newtona
- Rozwinięcie teorii mechaniki płynów – równania Eulera:
  - Opis dynamiki płynów doskonałych
  - Podstawa dla późniejszego rozwoju hydrodynamiki

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = -\frac{1}{\rho} \nabla p + f$$





# Formalizacja notacji $f(x)$ , $e$ , $\Sigma$

- Zapisywanie funkcji jako  $f(x)$ , gdzie  $f$  reprezentuje funkcję, a  $x$  jej argument

- $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

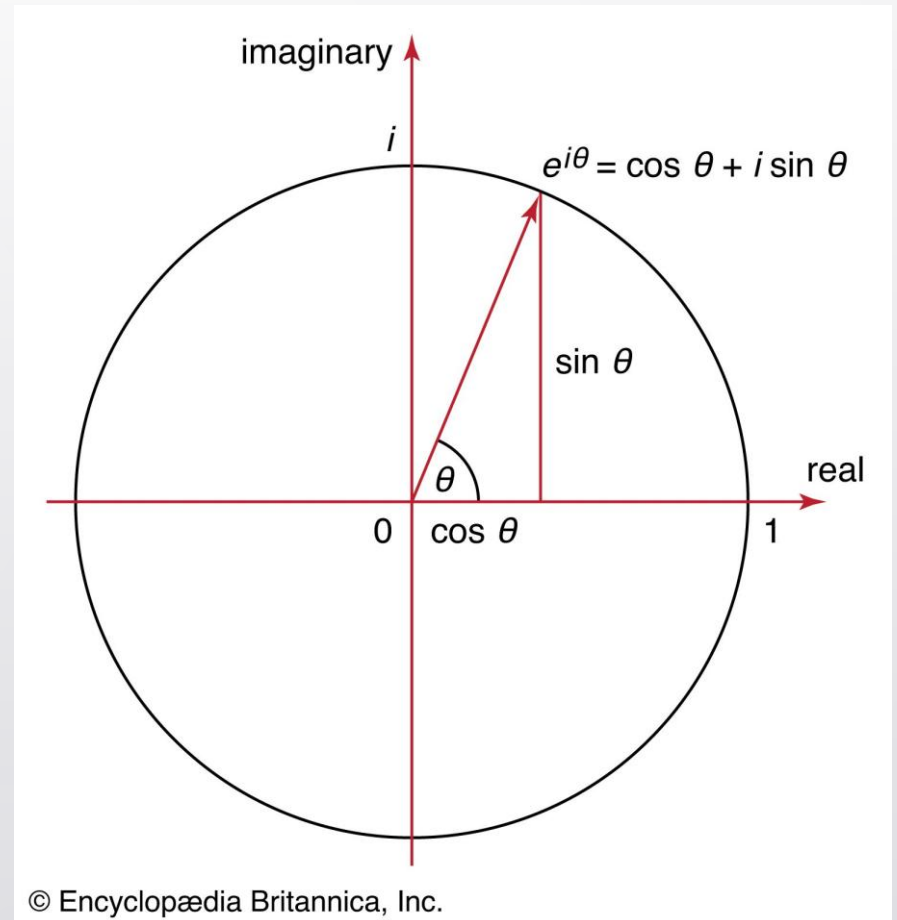
- $\sum_{i=1}^n a_n$

```
2.718281828459045235360
28747135266249775724709
36999595749669676277240
76630353547594571382178
52516642742746639193200
30599218174135966290435
72900334295260595630738
13232862794349076323382
98807531952510190115738
34187930702154089149934
88416750924476146066808
22648001684774118537423
45442437107539077744992
06955170276183860626133
13845830007520449338265
60297606737113200709328
70912744374704723069697
```



# Analiza zespolona i jednostka urojona $i$

- Jednostka urojona  $i$ :  $i^2 = -1$
- $z = a + bi$
- Formuła Eulera:  
$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$
- $z = |z|e^{i\theta}$



# Życie w Berlinie

- „Listy do księżniczki niemieckiej”
- Konflikt Eulera z Fryderykiem (królem Prus)
- Niezadowolenie Fryderyka z praktycznych zdolności inżynierskich Eulera:

„Chciałem mieć w moim ogrodzie silny strumień wody: Euler obliczył moc kół niezbędną do wzniesienia wody na poziom rezerwuaru, z którego miała się rozplýwać kanałami, wytryskając w końcu w Sanssouci. Młyn został skonstruowany zgodnie z geometrycznymi planami, a nie był w stanie podnieść nawet kropli wody pięćdziesiąt kroków od zbiornika. Marność nad marnościami! Marność geometrii!”



# Powrót do Petersburga

- 1762 r. – Katarzyna II obejmuje tron w Rosji
- 1766 roku – Euler akceptuje zaproszenie do powrotu do Akademii w Petersburgu, ale na pewnych warunkach:
  - pensja 3000 rubli rocznie,
  - emerytura dla żony,
  - obietnica wysokich stanowisk dla synów



Rosyjska Akademia Nauk



# Niefortunne wydarzenia w Petersburgu

- Całkowita utrata wzroku
- 1771 rok – pożar, który zniszczył dom Eulera
- 1773 rok – śmierć żony Katarzyny Gsell
- 1776 rok – nowe małżeństwo



# *Institutiones calculi integralis*

- Czyli po polsku:  
„Podstawy rachunku całkowego”
- Pierwsza publikacja: 1768 rok
- Opublikowane w trzech tomach
- Kontynuacja wcześniejszych prac
- Metody rozwiązywania całek i ich zastosowania

INSTITVTIONVM  
CALCVLI INTEGRALIS  
VOLVMEN PRIMVM

IN QVO METHODVS INTEGRANDI A PRIMIS PRIN-  
CIPIS VSQVE AD INTEGRATIONEM AEQVATIONVM DIFFE-  
RENTIALIVM PRIMI GRADVS PERTRACTATVR.

A V C T O R E

LEONHARDO EVLERO

ACAD. SCIENT. BORVSSIAE DIRECTORE VICENNALI ET SOCIO  
ACAD. PETROP. PARISIN. ET LONDIN.



P E T R O P O L I

Impensis Academiae Imperialis Scientiarum

1768.



# Tożsamość Eulera

- Najpiękniejszy wzór matematyczny

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

## Dowód tożsamości Eulera

Dowód tożsamości opiera się na **formule Eulera**:

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x).$$

Podstawiając  $x = \pi$ :

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i \sin(\pi).$$

Z własności funkcji trygonometrycznych:

$$\cos(\pi) = -1, \quad \sin(\pi) = 0.$$

Zatem:

$$e^{i\pi} = -1.$$

Dodając 1 do obu stron, otrzymujemy:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$



# Śmierć Eulera

- Petersburg, 18 września 1783 r
- Powód: wylew krwi do mózgu.
- W swojej mowie pogrzebowej dla Francuskiej Akademii, francuski matematyk i filozof markiz de Condorcet napisał:  
*“il cessa de calculer et de vivre— ... przestał liczyć i żyć”.*
- Euler został pochowany obok Katarzyny na Smoleńskim Cmentarzu Luterańskim na Wyspie Wasiljewskiej.
- Aby uczcić 250. rocznicę urodzin Eulera w 1957 roku, jego grób przeniesiono na Cmentarz Łazarewski w klasztorze Aleksandra Newskiego.





# Źródła

- <https://divisbyzero.com/2010/11/09/an-amazing-paragraph-from-eulers-introductio/>
- [https://en.wikipedia.org/wiki/Introductio\\_in\\_analysin\\_infinitorum](https://en.wikipedia.org/wiki/Introductio_in_analysin_infinitorum)
- [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Euler - Institutionum calculi integralis, 1768 - BEIC 1338320 F.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Euler_-_Institutionum_calculi_integralis,_1768_-_BEIC_1338320_F.jpg)
- [https://en.wikipedia.org/wiki/Institutiones\\_calculi\\_differentialis](https://en.wikipedia.org/wiki/Institutiones_calculi_differentialis)
- [https://en.wikipedia.org/wiki/Euler\\_equations\\_\(fluid\\_dynamics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_equations_(fluid_dynamics))
- <https://krzysztofpozarski.com/archiwum-rosyjskiej-akademii-nauk-filia-w-petersburgu/>
- <https://fotoeins.com/2016/02/22/berlin-mitte-behrenstrasse21-euler-haus/>
- <https://www.redbubble.com/i/art-board-print/e-Euler-number-by-Ultrinik/103710887.TR477>
- <https://www.britannica.com/science/Eulers-formula>
- [https://en.wikipedia.org/wiki/Institutiones\\_calculi\\_integralis](https://en.wikipedia.org/wiki/Institutiones_calculi_integralis)
- <https://www.unige.ch/~wanner/euler.html>
- <https://sciencephotogallery.com/featured/leonhard-eulers-rescue-from-a-fire-1771-sheila-terry.html>
- <https://www.science4all.org/article/eulers-identity/>
- <https://www.flickr.com/photos/sudentas/1270449525>



Dziękujemy za uwagę!