LWOWSKA SZKOŁA MATEMATYCZNA

KRÓTKI KURS HISTORII MATEMATYKI

WYDZIAŁ MATEMATYKI I NAUK INFORMACYJNYCH

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

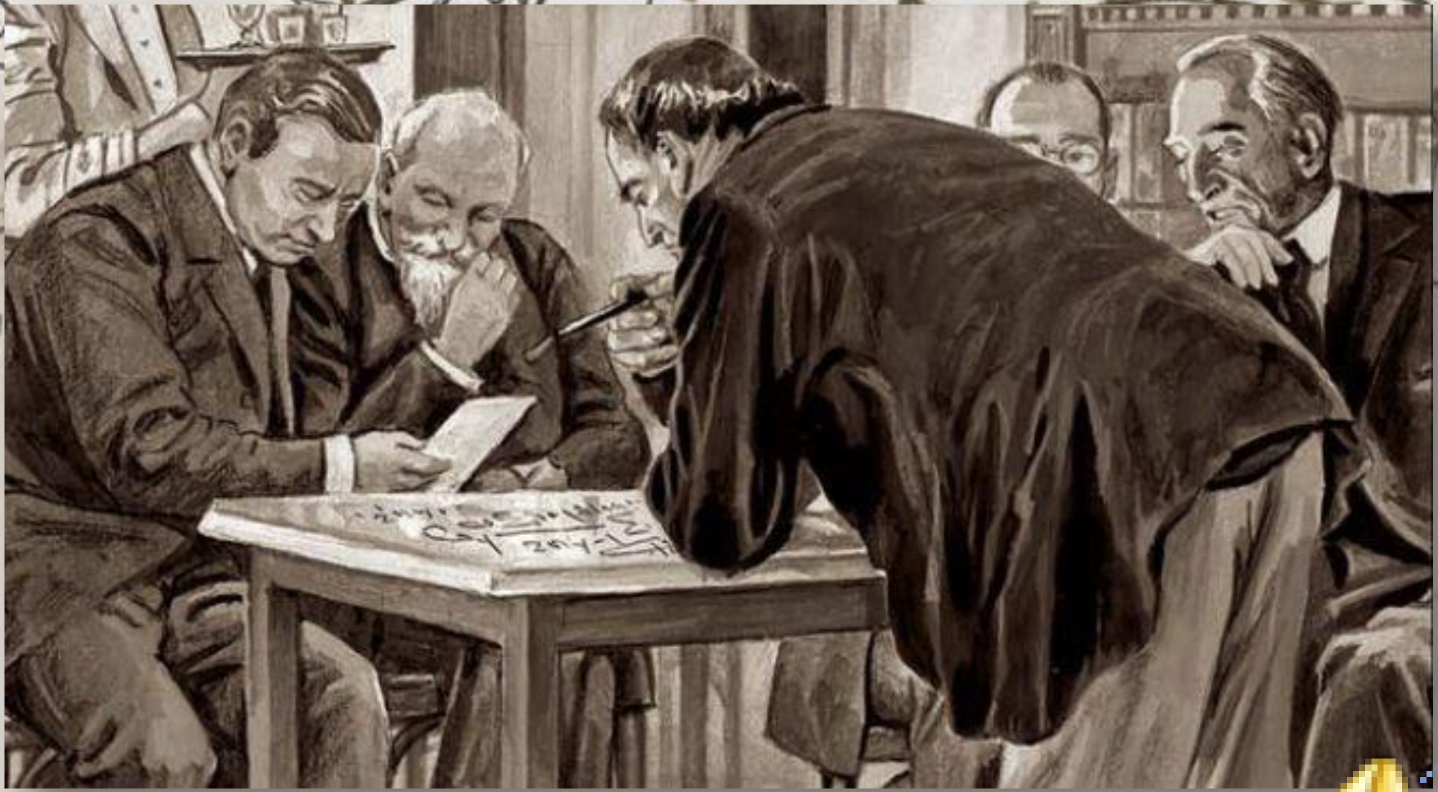
AUTORZY:

ANNA KACHNYCZ

MONIKA NOWAK

KIRA IVANOVA

Lwów, 17 lipca 1934 roku, kawiarnia Szkocka

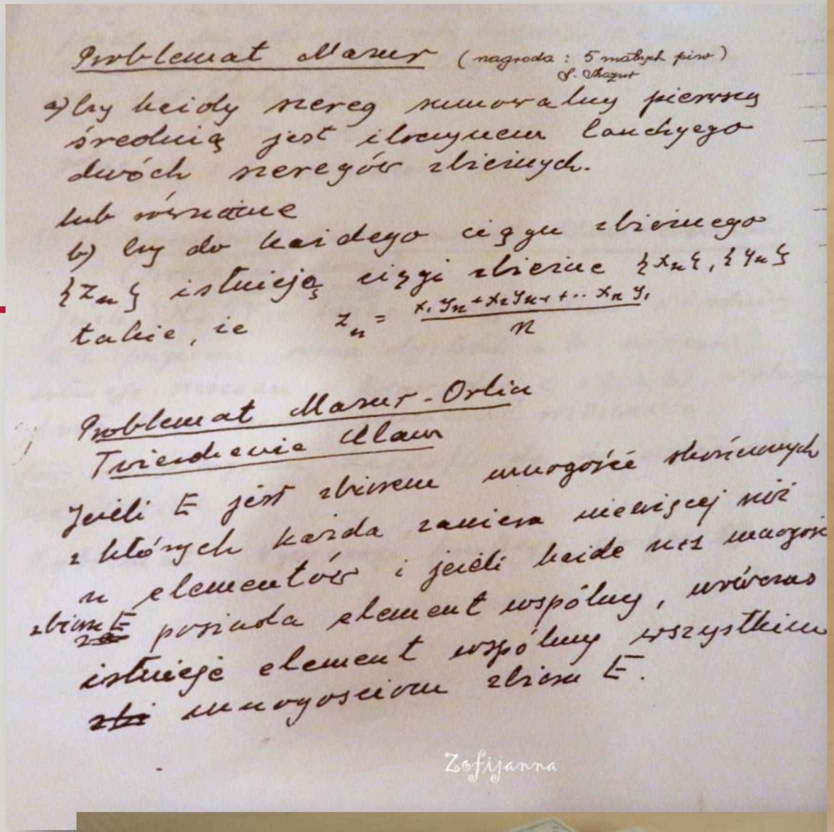


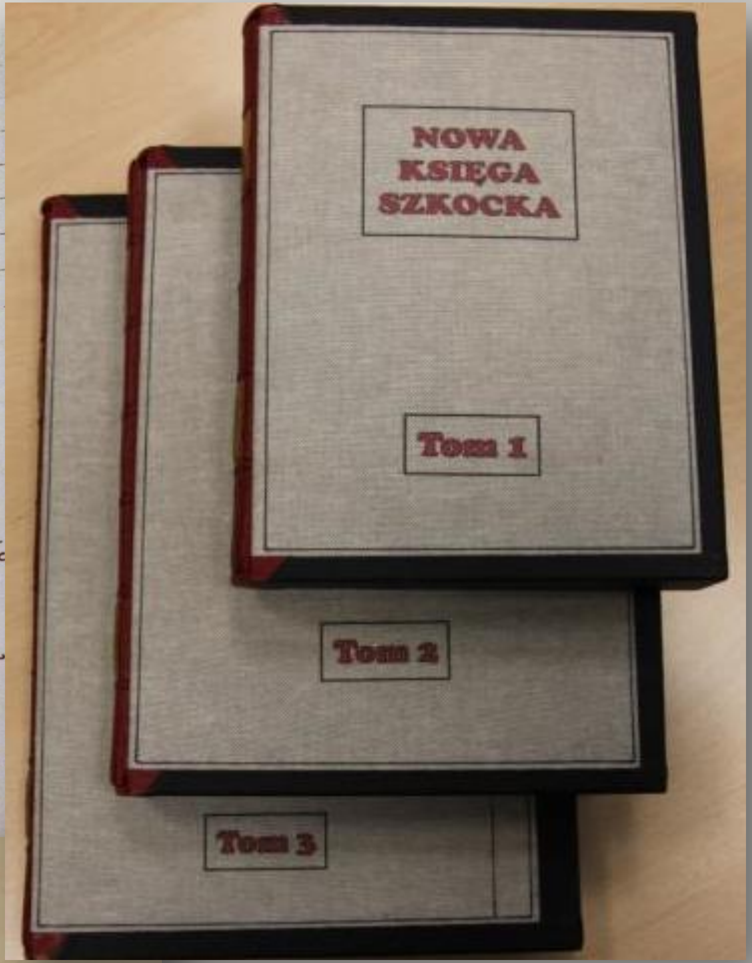
KAWIARNIA SZKOCKA

- Stolica światowej matematyki znajdowała się w dwudziestoleciu międzywojennym w Polsce. Był nią **Lwów**. A najważniejszym miejscem w mieście - **kawiarnia Szkocka**

Kawiarnia Szkocka
„To tam spotykali się lwowscy matematycy. Przy kawie, koniaku i szachach długo rozmawiali o wszystkim i niczym. Ale każdego dnia przychodził moment, w którym gasły wszystkie inne tematy, a całe towarzystwo skupiało się na liczbach, wzorach i twierdzeniach zapisywanych choćby na kawiarnianych serwetkach. Tak właśnie powstawały rozwiązania najpoważniejszych ówczesnych problemów matematycznych.”

KSIĘGA SZKOCKA



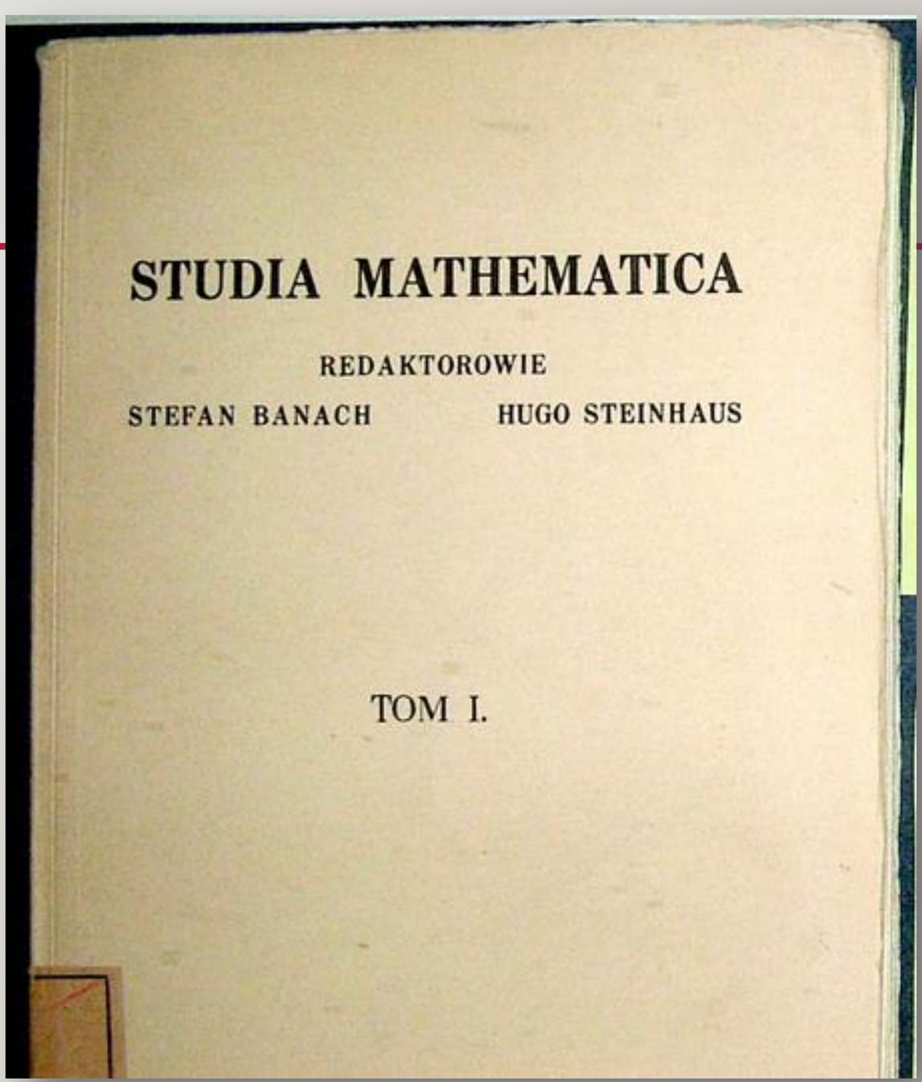


„Na stronach nieparzystych »Książki« wpisywano problemy, na sąsiednich parzystych było miejsce na komentarze
i rozwiązania. Ogółem w okresie funkcjonowania »Książki«, tj. w latach 1935-1941, wpisano 193 problemy numerowane oraz kilka nienumerowanych. Niektóre rozwiązywano potem przez lata i także w ten sposób »Książka« wpłynęła na światową matematykę.”

~Roman Duda „Osiągnięcia i znaczenie lwowskiej szkoły matematycznej”

STUDIA MATHEMATICA

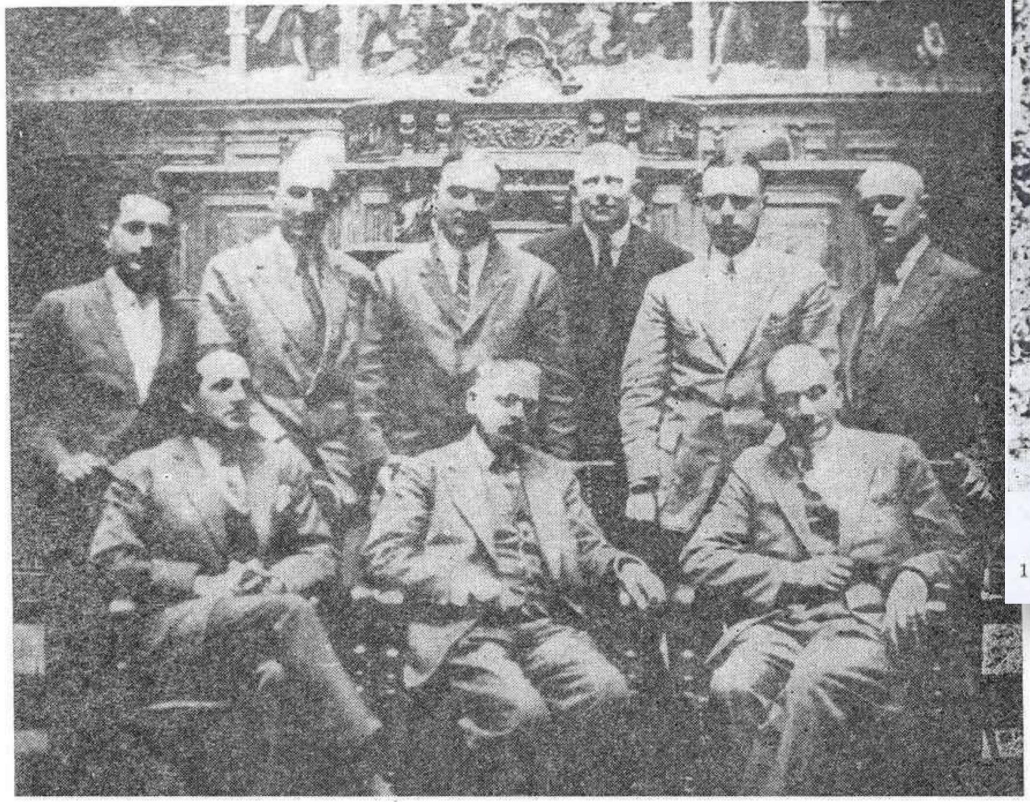
Czasopismo stworzone przez Stefana Banacha i Hugona Steinhausa w 1929 roku we Lwowie i poświęcone tylko jednej gałęzi matematyki: analizie funkcjonalnej.



NA TLE HISTORII…

Zjazd Kół Matematyczno-Fizycznych, Lwów 1930 r.

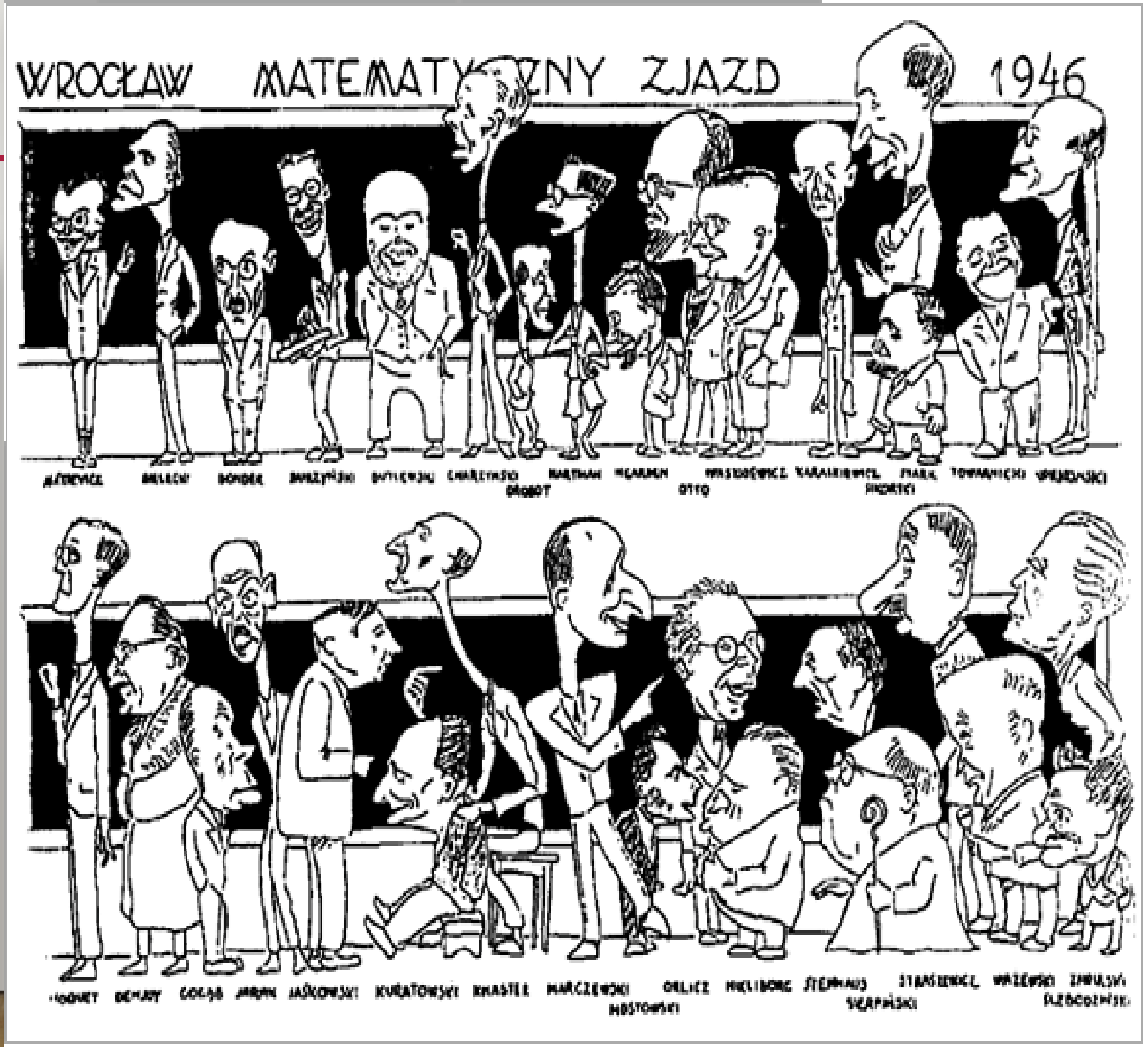
1. L. Chwistek, 2. S. Banach, 3. S. Loria, 4. K. Kuratowski, 5. S. Kaczmarz, 6. J. P. Schauder, 7. M. Stark, 8. K. Borsuk, 9. E. Marczewski, 10. S. Ulam, 11. A. Zawadzki, 12. E. Otto, 13. W. Zonn, 14. M. Puchalik, 15. K. Szpunar



Zermelo we Lwowie (1930). Siedzą od lewej: prof. H. Steinhaus, prof. E. Zermelo, prof. S. Mazurkiewicz, stoją: K. Kuratowski, B. Knaster, S. Banach, W. Stożek, E. Żyliński, S. Ruziewicz

„Dowcipem nie należy celować, tylko trafiać” ~Hugo Steinhaus

Stanisłam Mazur wręcza żywą gęś - nagrodę dla matematyka, który rozwiązał jego zadanie z "Księgi Szkockiej" (Fot. Wikimedia Commons).



LIPIEC 1916 ROKU, KRAKÓW, PLANTY…

Pomnik-ławeczka polskich matematyków Stefana Banacha oraz Ottona Nikodyma, odsłonięty 14 października 2016. Rzeźba prof. Stefana Dousy. Znajduje się w okolicach ul. Podzamcze.

STEFAN BANACH

Ur. 30 marca 1892 w Krakowie, zm. 31 sierpnia 1945 we Lwowie.

Polski matematyk, jeden z przedstawicieli lwowskiej szkoły matematycznej.

Członek Polskiej Akademii Umiejętności (1924), członek-korespondent Akademii Nauk Ukraińskiej SRR (1940)

DZIECIŃSTWO

Uczniowie IV klasy Gimnazjum Czwartego w Krakowie w roku szkolnym 1905/6.

Marian Albiński (1)
Stefan Banach (2)
Witold Wilkosz (3)

STUDIA I POCZĄTEK KARIERY

Politechnika Lwowska

Hugo Steinhaus – odkrywca talentu Stefana Banacha

KARIERA NAUKOWA ORAZ ŻYCIE "PO GODZINACH"

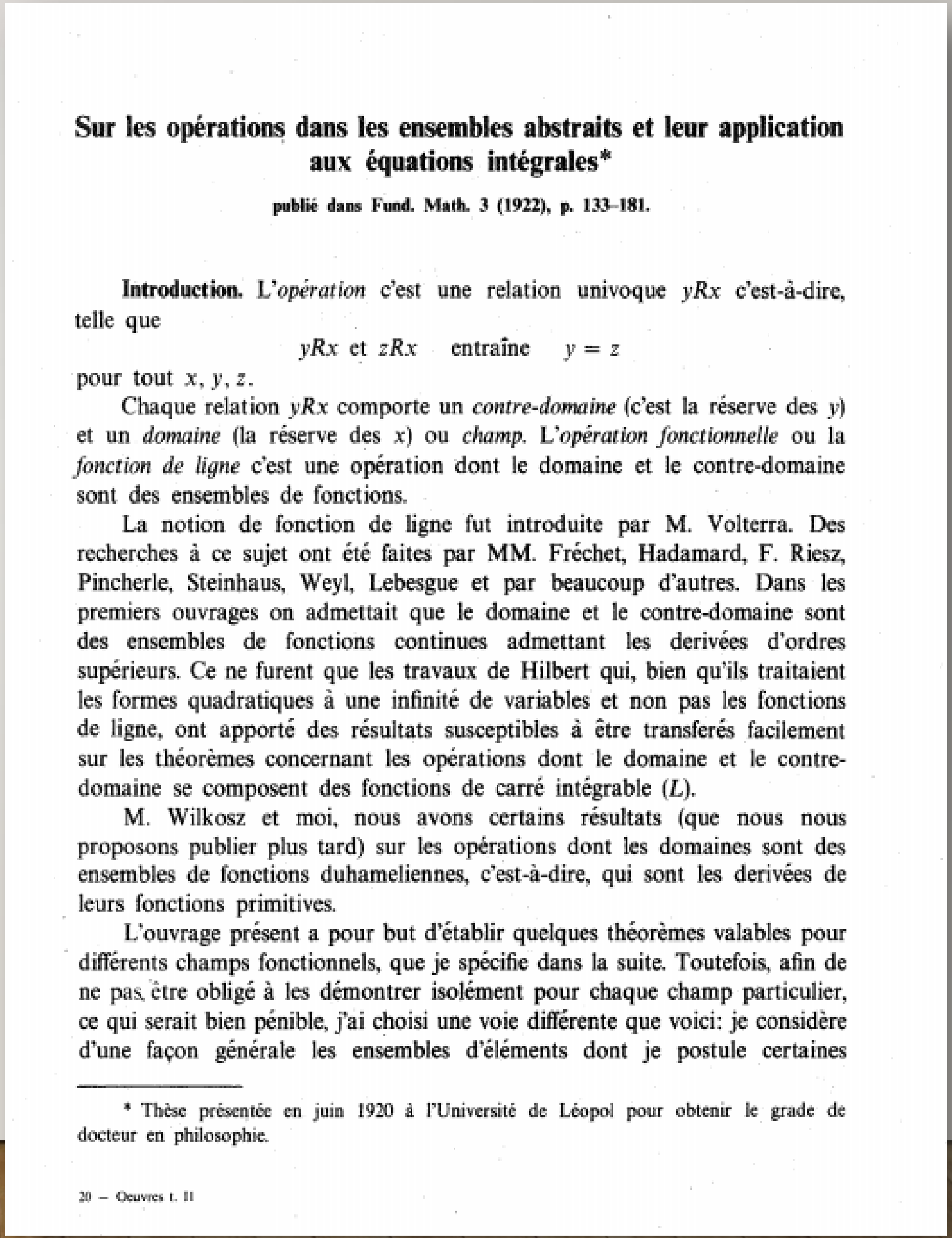
Stefan Banach

Uniwersytet
Jana Kazimierza we Lwowie

POCZĄTEK ANALIZY FUNKCJONALNEJ

1920 r. - rozprawa doktorska S. Banacha, opubikowana **1922 r.** w polskim czasopiśmie **„Fundamenta Mathematicae”**.

1922 r. - Paul Lévy wprowadził termin **„Analiza Funkcjonalna”.**



Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*

publié dans Fund. Math. 3 (1922), p. 133–181.

Introduction. L'*opération* c'est une relation univoque yRx c'est-à-dire, telle que

$$yRx \text{ et } zRx \quad \text{entraîne} \quad y = z$$

pour tout x, y, z.

Chaque relation yRx comporte un *contre-domaine* (c'est la réserve des y) et un *domaine* (la réserve des x) ou *champ*. L'*opération fonctionnelle* ou la *fonction de ligne* c'est une opération dont le domaine et le contre-domaine sont des ensembles de fonctions.

La notion de fonction de ligne fut introduite par M. Volterra. Des recherches à ce sujet ont été faites par MM. Fréchet, Hadamard, F. Riesz, Pincherle, Steinhaus, Weyl, Lebesgue et par beaucoup d'autres. Dans les premiers ouvrages on admettait que le domaine et le contre-domaine sont des ensembles de fonctions continues admettant les derivées d'ordres supérieurs. Ce ne furent que les travaux de Hilbert qui, bien qu'ils traitaient les formes quadratiques à une infinité de variables et non pas les fonctions de ligne, ont apporté des résultats susceptibles à être transferés facilement sur les théorèmes concernant les opérations dont le domaine et le contre-domaine se composent des fonctions de carré intégrable (L).

M. Wilkosz et moi, nous avons certains résultats (que nous nous proposons publier plus tard) sur les opérations dont les domaines sont des ensembles de fonctions duhameliennes, c'est-à-dire, qui sont les derivées de leurs fonctions primitives.

L'ouvrage présent a pour but d'établir quelques théorèmes valables pour différents champs fonctionnels, que je spécifie dans la suite. Toutefois, afin de ne pas être obligé à les démontrer isolément pour chaque champ particulier, ce qui serait bien pénible, j'ai choisi une voie différente que voici: je considère d'une façon générale les ensembles d'éléments dont je postule certaines

* Thèse présentée en juin 1920 à l'Université de Léopol pour obtenir le grade de docteur en philosophie.

PRZETRZEŃ TYPU (B) (PRZESTRZEŃ BANACHA)

§ 1. **Axiomes et définitions fondamentales.** Soit E une classe composée tout au moins de deux éléments, d'ailleurs arbitraires, que nous designerons p. ex. par $X, Y, Z, \ldots$

a, b, c désignant les nombres réels quelconques, nous définissons pour E deux opérations suivantes:

1) l'addition des éléments de E

$$X+Y,\ X+Z, \ldots$$

2) la multiplication des éléments de E par un nombre réel

$$aX,\ bY, \ldots$$

Admettons que les propriétés suivantes sont réalisées*:

I_1. *$X+Y$ est un élément bien déterminé de la classe E,*

I_2. $X+Y = Y+X$,

I_3. $X+(Y+Z) = (X+Y)+Z$,

I_4. $X+Y = X+Z$ *entraîne* $Y = Z$,

I_5. *Il existe un élément de la classe E déterminé θ et tel qu'on ait toujours* $X+\theta = X$,

I_6. *$a \cdot X$ est un élément bien déterminé de la classe E,*

I_7. $a \cdot X = \theta$ *équivaut à* $X = \theta$ *ou* $a = 0$,

I_8. $a \neq 0$ *et* $a \cdot X = a \cdot Y$ *entraînent* $X = Y$,

I_9. $X \neq \theta$ *et* $a \cdot X = b \cdot X$ *entraînent* $a = b$,

I_{10}. $a \cdot (X+Y) = a \cdot X + a \cdot Y$,

I_{11}. $(a+b) \cdot X = a \cdot X + b \cdot X$,

I_{12}. $1 \cdot X = X$,

I_{13}. $a \cdot (b \cdot X) = (a \cdot b) \cdot X$.

II. *Il existe une operation appelée norme* (nous la désignerons par le symbole $\|X\|$), *définie dans le champ E, ayant pour contre-domaine l'ensemble de nombres réels et satisfaisant aux conditions suivantes*:

II_1. $\|X\| \geqslant 0$,

II_2. $\|X\| = 0$ *équivaut à* $X = \theta$,

II_3. $\|a \cdot X\| = |a| \cdot \|X\|$,

II_4. $\|X+Y\| \leqslant \|X\| + \|Y\|$,

III. *Si* 1° $\{X_n\}$ *est une suite d'éléments de* E, 2° $\lim\limits_{\substack{r\to\infty \\ p\to\infty}} \|X_r - X_p\| = 0$, *il existe un élément X tel que*

$$\lim_{n\to\infty} \|X - X_n\| = 0.$$

Nous introduisons les définitions suivantes où X, X_n, Y, Y_n désignent des éléments de E.

Définition 1. Nous dirons que la suite $\{X_n\}$ *tend vers X suivant la norme*, ce que nous écrirons

$$\overline{\overline{\lim_{n\to\infty}}}\, X_n = X,$$

lorsque

$$\lim_{n\to\infty} \|X - X_n\| = 0.$$

PODSTAWOWE WŁASNOŚCI PRZESTRZENI TYPU (B)

§ 2. THÉORÈME 6. *Si*

1° $U(X)$ *est une opération continue dans E, le contre-domaine de* $U(X)$ *étant contenu dans* E;

2° *Il existe un nombre* $0 < M < 1$ *qui pour tout* X' *et* X'' *remplit l'inégalité*

$$\|U(X') - U(X'')\| \leqslant M \cdot \|X' - X''\|,$$

il existe un élément X *tel que* $X = U(X)$.

THÉORÈME 4. *Étant donnés*

1° *Une suite d'éléments* $\{X_n\}$,

2° $\overline{\overline{\lim_{n\to\infty}}}\, X_n = X$,

3° $\overline{\overline{\lim_{n\to\infty}}}\, X_n = Y$,

on a $X = Y$.

THÉORÈME 1. $\|X - Y\| \leqslant \|X\| + \|Y\|$.

THÉORÈME 2. $\|X - Y\| \geqslant \|X\| - \|Y\|$.

THÉORÈME 3. $\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x_n \right\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot \|X_n\|$.

„STUDIA MATHEMATICA”(1929-1940)

- 169 prac;
- 69% matematyków lwowskich;

- S. Banach (16 prac) i H. Steinhaus (9)

oraz ich uczniowie:
H. Auerbach (9), M. Eidelheit (7),
S. Kaczmarz (12), M. Kac (9),
S. Mazur (17), W. Orlicz (21),
J. Schauder (7), J. Schreier (6) i inni.

Notes on orthogonal series I.

by

S. KACZMARZ (Lwów).

1. We prove first a theorem which is a partial generalisation of a theorem of KOLMOGOROFF [1]).

Suppose that $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ is an orthogonal series, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty$, the functions $\varphi_n(t)$ orthogonal and normal in $\langle 0, 1\rangle$. Suppose further that the series is almost everywhere summable by a linear method $T(b_{n,k})$; then the theorem is as follows.

Theorem. *There exists a sequence of indices $\{n_i\}$, dependent only of the linear method T, such that the sequence $s_{n_i}(t) = \sum_{k=1}^{n_i} a_k \varphi_k(t)$ is almost ewerywhere convergent.*

In KOLMOGOROFF's theorem we assume that the series is summable $(C, 1)$ almost ewerywhere and assert, that the sequence $s_{2^i}(t)$ is convergent almost everywhere; our proof gives in that case the sequence $n_i = i^i$.

To prove the theorem we denote by $\sigma_n(t)$ the expression $\sum_{k=1}^{\infty} s_k(t)\, b_{n,k}$; by hypothesis $\sigma_n(t)$ is almost everywhere convergent. The method T being linear and regular we have:

$$1)\qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,k} = 1,$$

$$2)\qquad \lim_{n\to\infty} b_{n,k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

$$3)\qquad \sum_{k=1}^{\infty} |b_{n,k}| \leqslant M.$$

[1]) Fund. Math. V (1924) p. 96—97.

Denote further by I_n the integral $\int_0^1 [s_n(t) - \sigma_n(t)]^2\, dt$, then we have

$$s_n(t) - \sigma_n(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(t)\,[1 - b_{n,k} - b_{n,k+1} - \ldots]\, dt - $$
$$- \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \varphi_k(t)\,[b_{n,k} + b_{n,k+1} + \ldots]\, dt$$

and

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^2\, [1 - b_{n,k} - b_{n,k-1} \ldots]^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_n^2\, [b_{n,k} + b_{n,k+1} + \ldots]^2.$$

We write

$$1 - b_{n,k} - b_{n,k+1} - \ldots = b_{n,1} + b_{n,2} + \ldots + b_{n,k-1} + \varepsilon_n,$$

where $\varepsilon_n \to 0$ with $1/n$.

Let now the sequence $\{n_i\}$ be defined as follows:

$$a)\qquad |\varepsilon_{n_i}| \leqslant \frac{1}{i},$$

$$b)\qquad \sum_{j=1}^{l} b_{n_i,j} | < \frac{1}{i} \ \text{for}\ l \leqslant n_{i-1},\quad n_0 = 0,$$

$$c)\qquad \sum_{j=1}^{l} b_{n_i,j} | > 1 - \frac{1}{i} \ \text{for}\ l > n_{i+1}.$$

The inequalites a) and c) are possible on account of the property 1) of the matrix $T(b_{n,k})$ and the inequality b) by the property 2). Consider now the sum

$$\sum_{i=1}^{\infty} I_{n_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \Big[\sum_{k=1}^{n_i} a_k^2\, (b_{n_i,1} + \ldots + b_{n_i,k-1} + \varepsilon_{n_i})^2 + $$
$$+ \sum_{k=n_i+1}^{\infty} a_k^2\, (b_{n_i,k} + \ldots) \Big] =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\, [(b_{n_j,1} + \ldots + b_{n_j,k-1} + \varepsilon_{n_j})^2 + (b_{n_{j+1},1} + \ldots + b_{n_{j+1},k-1} +$$
$$+ \varepsilon_{n_{j+1}})^2 + \ldots] + \sum_{k=n_1+1}^{\infty} a_k^2\, [(b_{n_1,k} + \ldots)^2 + (b_{n_2,k} + \ldots)^2 +$$
$$+ \ldots + (b_{n_l,k} + \ldots)^2],$$

MŁODSI ADEPCI SZKOŁY

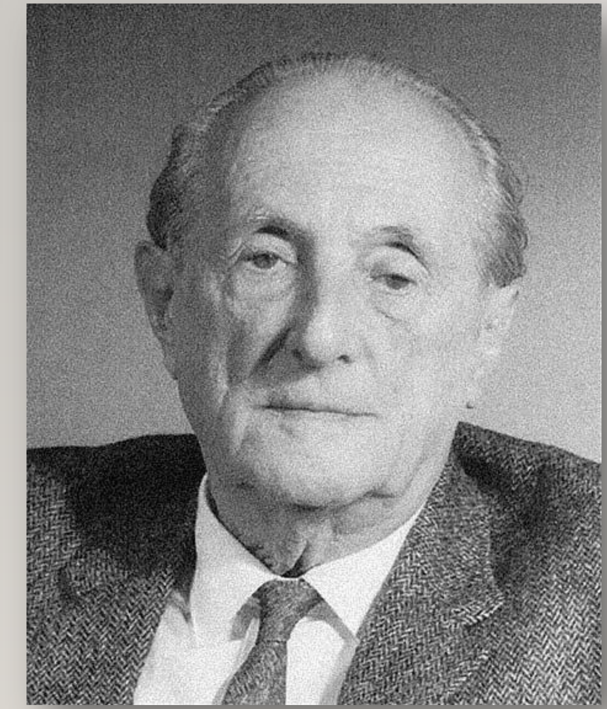
Nowa klasę przestrzeni Banacha, L^{Φ}, jako rozszerzenie przestrzeni Lebesgue'a L^{p} (przestrzeń Orlicza)

Władysław Orlicz
(1903–1990)

Przestrzeni typu B_0^{19}, przestrzeni typu B_0^{*}, hiperpłaszczyzna, rozmaitość liniowa, ciało wypukłe

Stanisław Mazur
(1905–1981)

WKŁAD SZKOŁY W RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA



Hugo Steinhaus
(1887–1972)

$([0,1], L, \lambda)$

$[0,1]$- przestrzeń zdarzeń elementarnych

L - rodzina podzbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue’a

λ – miarą Lebesgue’a

Antoni Łomnicki
(1881–1941)

WKŁAD W RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Sur la théorie de la mesure dans les espaces combinatoires et son application au calcul des probabilités I. Variables indépendantes [1].

Par

Z. Łomnicki et **S. Ulam** (Lwów).

L'analogie entre la mesure et la probabilité est connue depuis longtemps [2].

La probabilité pour qu'un point appartienne à un ensemble A d'un espace donné remplit les postulats de la mesure d'ensemble. On admet notamment la règle des probabilités totales — c.-à-d. l'additivité finie ou dénombrable de la mesure. (Dans le cas où l'espace est dénombrable le postulat de l'additivité finie est souvent plus adéquat).

La théorie de la mesure pour *un* espace constitue cependant une théorie d'une seule variable éventuelle et ne semble pas donner un

[1]) Les résultats concernant la théorie de la mesure dans les produits ont été exposés par les auteurs dans un Séminaire de M. H. Steinhaus (Mai 1932). Les théorèmes relatifs ont été présentés à la séance de la Soc. Pol. Math. Section de Lwów du 2. VII. 1932 (v. aussi la note de l'un de nous insérée dans les „Verhandl. des Int. Math. Kongr. Zürich" 1932, Band II). Les applications au calcul des probabilités qui se trouvent dans la deuxième partie de ce travail ont été présentées à la séance de la Soc. Pol. Math. Section de Lwów le 18. III. 1933.

[2]) E. Borel, *Sur les probabilités dénombrables*... Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, 1909, p. 247—281. — A. Łomnicki, *Nouveaux fondements du calcul des probabilités*. Fund. Math. T. IV, p. 35—71. — H. Steinhaus, *Les probabilités dénombrables et leur rapport à la théorie de la mesure*. Fund. Math. T. IV, p. 287—310. — R. v. Mises, *Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Math. Zeit. Bd. 34, p. 568—619. — P. Lévy, *Calcul des probabilités*. Note (p. 325—345) Gauthier-Villars, Paris. — Cf. aussi une étude approfondie chez A. Kolmogoroff, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* dans les *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Berlin 1933.

1. Les axiomes de la mesure pour une variable éventuelle [10]).

Soit E une ensemble abstrait. Nous supposons que dans l'ensemble E, pour une classe $\mathfrak{M}$ de sous-ensembles, est définie une fonction d'ensemble $m(X)$, appellée mesure de X admettant comme valeurs des nombres réels. (Cette fonction peut être interprétée comme probabilité pour qu'un élément x, pris au hasard, appartienne à l'ensemble donné X)

Supposons que les conditions suivantes sont remplies par la classe $\mathfrak{M}$ des ensembles mesurables:

(I) *L'espace total est mesurable, ainsi que les ensembles composés d'un seul point*: $E \in \mathfrak{M}$; $\{x\} \in \mathfrak{M}$

(II) *Si* $X \in \mathfrak{M}$ *et* $Y \in \mathfrak{M}$, *alors* $(X-Y) \in \mathfrak{M}$

(III) $X_i \in \mathfrak{M} (i = 1, 2, \ldots)$, *alors* $\sum_{\nu=1}^{\infty} X_\nu \in \mathfrak{M}$

(IV) *Si* $Z \subset X$, $X \in \mathfrak{M}$ *et* $m(X) = 0$, *alors* $Z \in \mathfrak{M}$.

Nous supposons que la fonction $m(X)$ remplit les postulats:

$$m(X) \geqslant 0, \quad m(E) = 1 \tag{1}$$

$$m\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} X_\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} m(X_\nu) \text{ si } X_i X_j = 0 \text{ pour } i \neq j. \tag{2}$$

Remarques. La condition (2) exprime „l'additivité complète (dénombrable)" de la mesure. Ce postulat est indispensable dans beaucoup de problèmes dans le calcul des probabilités, même dans les problèmes élémentaires du calcul des pro-

[9]) Le lecteur qui ne s'intéresse qu'aux théorèmes du calcul des probabilités peut omettre les démonstrations des théorèmes de la partie première. La connaissance de la notion et des propriétés les plus élémentaires des produits et de ces théorèmes est suffisante.

[10]) Kolmogoroff, op. cit., Ch. I.

PARADOKS BANACHA-TARSKIEGO (1924)

Kula może być pocięta na skończenie wiele kawałków, z których można złożyć dwie kule identyczne z kulą wyjściową.

LITERATURA

- S. Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux equations integrals, „Fund. Math.’ 1922, nr 3, s. 133–181.
- A. Łomnicki, Nouveaux fondements du calcul des probabilités, „Fund. Math.“ 1923, nr 4, s. 34–71.
- H. Steinhaus, Les probabilités dénombrables et leur rapport à la théorie de mesure, „Fund. Math.“ 1923, nr 4, s. 286–310.
- Roman Duda „Osiągnięcia i znaczenie Lwowskiej Szkoły matematycznej”, 2009.
- „Piękne umysły Lwowska szkoła matematyczna” © by Ośrodek KARTA, 2016
- 6 S. Banach, Sur le problème de mesure, „Fund. Math.“ 1923, nr 4, s. 7–33. 27
- Por. S. Wagon, The Banach-Tarski Paradox, Cambridge University Press 1985.
- https://www.impan.pl/pl/wydawnictwa/czasopisma-i-serie-wydawnicze/studia-mathematica/all
- http://pldml.icm.edu.pl/mathbwn/element/bwmeta1.element.bwnjournal-journal-sm