Matematyka Dyskretna

Zestaw zadań nr 1

1. Ile rozwiązań ma równanie $x_1 + x_2 + ... + x_k = n$, gdzie każde x_i jest całkowite dodatnie.

2. Korzystając z odpowiedzi poprzedniego zadania znaleźć liczbę rozwiązań równania $x_1 + x_2 + ... + x_k = n$, gdzie każde x_i jest całkowite nieujemne.

3. Biorąc pod uwagę liczbę tych x_i, które są zerami w 2 i stosując odpowiedź zadania 1 pokazać, że $\binom{n+k-1}{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i}\binom{n-1}{k-1-i}$.

4. n osób wsiadło do windy na parterze w k-piętrowym budynku. Jakie jest prawdopodobieństwo, że każda z nich wysiądzie na innym piętrze? Zakładamy, że $n \leq k$.

5. Na ile sposobów można posadzić n osób przy okrągłym stole ,aby wybrane 2 osoby siedziały obok siebie?

6. W poczekalni do lekarza, w rzędzie złożonym z n krzeseł, siedzi k pacjentów od lewej do prawej , w ten sposób, że żadni dwaj nie siedzą na sąsiednich kresłach. Na ile sposobów można wybrać odpowiedni zbiór k krzeseł?

7. Rozważając kolorowanie k spośród n obiektów, mając do dyspozycji 2 kolory, pokazać, że $2^k\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}$.

8. Udowodnić różnymi metodami : $\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$.

9. Na płaszczyźnie mamy n prostych z których x_1 jest równoległych w jednym kierunku, x_2 w drugim kierunku itd... x_k w k-tym kierunku oraz żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie. Pokazać, że liczba punktów przecięcia tych prostych wynosi: $0,5(n^2 - (\sum_{i=1}^{k} x_i^2))$