Matematyka Dyskretna

Zestaw zadań 2

1. Udowodnić : $\binom{n+1}{2}^2 = \sum_{i=1}^{n} i^3$.

2. Udowodnić : $\binom{n+2}{3} = \sum_{i=1}^{n} i(n+1-i)$.

3. Udowodnić : $n^2\binom{2n-2}{n-1} = \sum_{i=1}^{n} i^2\binom{n}{i}^2$.

4. Udowodnić : $n2^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i}$.

5. Niech $G = (V, E)$ będzie grafem, w którym $|E| \neq \emptyset$ i w którym każdy wierzchołek ma stopień parzysty. Rozważając nietrywialne składowe (a więc takie w których każdy wierzchołek ma stopień conajmniej 2) pokazać, że G zawiera cykl. Pokazać, że jeśli usuniemy wszystkie krawędzie należące do tego cyklu, to w nowym grafie każdy wierzchołek w dalszym ciągu ma stopień parzysty. Wywnioskować, że istnieje zbiór cykli zawierający każdą krawędź z E dokładnie raz.

6. Pokazać, że każde drzewo o conajmniej dwu wierzchołkach ma conajmniej dwa wierzchołki o stopniu 1.

7. Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym i $|E| = |V| - 1$. Pokazać, że G jest drzewem.

8. Pokazać, że dla grafu $G = (V, E)$ o k składowych zachodzi

$$|V| - k \leq |E| \leq 0,5(|V| - k)(|V| - k + 1).$$