Matematyka Dyskretna

Zestaw zadań nr 5

1. W której sytuacji morna znaleźć męża dla każdej z pań ze zbioru $\{1, ..., 6\}$ spośród tych panów ze zbioru $\{1', ..., 6'\}$, których lubi:

   (a) 1 lubi $1', 2', 6'$, 2 lubi $2', 5'$, 3 lubi $1', 3'$, 4 lubi $2', 3'$, 5 lubi $2', 4'$, 6 lubi $1', 3'$.

   (b) 1 lubi $1', 4', 6'$, 2 lubi $2', 5', 6$', 3 lubi $2', 3', 5$', 4 lubi $2', 3', 5', 6'$, 5 lubi $2', 5'$, 6 lubi $3', 5', 6'$.

   Wykorzystaj algorytm oparty na "przyjęciu".

2. Niech rodzina $U = (A_1, ..., A_n)$ spełnia warunek z twierdzenia Halla czyli
$$\forall I \subset \{1, ..., n\} \ \ |\cup_{i \in I} A_i| \geq |I|.$$
   Niech $V = (B_1, ..., B_n)$ będzie rodziną minimalnych podzbiorów zbiorów $A_1, ..., A_n$ spełniających ten warunek czyli $B_i \subset A_i$ dla $i = 1, ..., n$ oraz
$$\forall I \subset \{1, ..., n\} \ \ |\cup_{i \in I} B_i| \geq |I|,$$
   ale usunięcie dowolnego elementu z któregokolwiek ze zbiorów B_i powoduje, że warunek z twierdzenia Halla nie jest spełniony. Nie stosując twierdzenia Halla pokazać, że każdy B_i ma dokładnie jeden element. Wywnioskować, że rodzina U ma transwersalę.

3. Mamy zbiory pań i panów spełniające warunek Halla. Dodatkowo niech C będzie panem lubianym przez co najmniej jedną panią. Różnymi metodami pokazać, że można znaleźć męża dla każdej z pań tak, aby C był jednym znich.

4. Mamy zbiory n pań i k panów spełniające warunek Halla. Dodatkowo każda pani lubi co najmniej $m(\leq n)$ panów. Pokazać, że n par małżeńskich można wybrać na co najmniej $m!$ sposobów.

5. Pokazać, że w grupie n pań i m panów istnieje k pań , którym można znaleźć mężów wtedy i tylko wtedy, gdy dowolny podzbiór pań (powiedzmy r elementowy) lubi co najmniej $k + r - n$ panów.