Matematyka Dyskretna

Zestaw zadań nr 6

1. Pokazać, że
   (a) żyją w Londynie dwie osoby, które mają taką samą liczbę książek,
   (b) żyją na świecie dwie osoby mające taką samą liczbę włosów.

2. Danych jest $n+1$ różnych dodatnich liczb całkowitych nie większych niż $2n$. Pokazać, że
   (a) istnieje wśród nich para liczb, których suma wynosi $2n+1$,
   (b) istnieje wśród nich para liczb względnie pierwszych,
   (c) istnieje wśród nich liczba, która jest wielokrotnościa innej liczby.

3. Danych jest $n+1$ dodatnich liczb całkowitych. Pokazać, że istnieje wśród nich para liczb różniących sie o wielokrotność n.

4. Niech T będzie trójkąrem równobocznym o boku równym 1. Pokazać, że
   (a) jeżeli w T umieścimy 5 punktów, to odległość między dwoma z nich powinna być nie większa niż $1/2$,
   (b) nie można pokryć T trzema kołami, z których każde ma średnicę mniejszą niż $1/\sqrt{3}$.

5. Udowodnić, że pewna wielokrotność dowolnej liczby całkowitej dodatniej ma postać 99...900...0

6. Każdego dnia wrzucamy do skarbonki albo 1 zł. albo 2 zł. Po n dniach mamy m zł. w skarbonce. Pokazać, że dla dowolnej liczby całkowitej $k \in [0, 2n-m]$ będzie istniał okres następujących po sobie dni podczas których włożyliśmy do skarbonki dokładnie k zł.

7. Pokazać, że suma kwadratów dwóch nieparzystych liczb całkowitych nie może być kwadratem liczby całkowitej.

8. Mamy $\frac{1}{2}(n^3-(n-2)^3)$ cegiełek o wymiarach $1 \times 1 \times 2$ i chcemy złaczyć je razem tak, by otrzymać zewnętrzną konstrucję sześćianu wymiaru $n \times n \times n$. Pokazać, że można to zrobić wtedy i tylko wtedy, gdy n jest parzyste.

9. Szachownicę $n \times n$ po wyrzuceniu dwóch pól można pokryć kostkami domina wtedy i tylko wtedy, gdy n jest parzyste i wyrzucone pola są różnych kolorów.