Matematyka Dyskretna

Zestaw zadań nr 8

1. (Podzbiory bez sąsiadów) Wyznaczyć równanie rekurencyjne na liczbę podzbiorów zbioru $[n] = \{1, ..., n\}$, wraz ze zbiórem pustym, nie zawierających sąsiednich liczb, a następnie je rozwiązać.

2. Wyznaczyć równanie rekurencyjne na liczę systemów różnych reprezentantów rodziny

   $$(\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, ..., \{i - 1, i, i + 1\}, ..., \{n - 2, n - 1, n\}, \{n - 1, n\}).$$

3. Stosując odpowiednie podstawienia rozwiązać równanie $D_n = (n - 1)(D_{n-1} + D_{n-2}),\ n \geq 3,\ D_1 = 0, D_2 = 1$.

4. Na podstawie powyższej zależności wyprowadzić równanie $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n,\ n \geq 1$ i rozwiązać je metodą funkcji tworzących.

5. Na ile sposobów można podzielić zbiór $[n]$ na dwa niepuste podzbiory?

6. Na ile sposobów można podzielić zbiór $[n]$ na trzy niepuste podzbiory?

7. Wyznaczyć równanie rekurencyjne na liczbę $g^*(n, k)$ k-elementowych podzbiorów zbioru $[n] = \{1, ..., n\}$ bez sąsiadów modulo n.

8. Na ile sposobów można wypełnić prostokąt o wymiarach 3 na $2n$ kostkami domino o wymiarach 2 na 1?

9. Rozwiązać równanie $a_{n+1} = 2(n + 1)a_n - 10n - 5,\ n \geq 0,\ a_0 = 5$.

10. Rozwiązać równanie $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 2^n + cos(n\pi/2),\ n \geq 0,\ a_0 = a_1 = 0$.

11. Rozwiązać równanie $a_{n+2} - 2a_{n+1} + 2a_n = \sqrt{2}^n \sin(n\pi/3) + n,\ n \geq 0,\ a_0 = 1, a_1 = 2$.