Matematyka Dyskretna

Zestaw zadań nr 9

1. Dla jakich n graf pełny K_n jest eulerowski, semi-eulerowski, hamiltonowski?

2. Dla jakich n, m graf pełny dwudzielny $K_{n,m}$ jest eulerowski, semi-eulerowski, hamiltonowski?

3. Rozważmy szachownicę wymiaru $n \times n$. Dla jakich wartości n można znaleźć dla skoczka trasę dookoła szachownicy, w której każdy z możliwych ruchów jest wykonywany dokładnie raz (w jednym lub drugim kierunku)?

4. Dopełnieniem grafu $G = (V, E)$ jest graf $\bar{G} = (V, \bar{E})$, gdzie

   $$\bar{E} = \{vw : \ v, w \in V, \ v \neq w, \ vw \textit{ nie należy do } E\} .$$

   Znaleźć przykład grafu eulerowskiego , którego dopełnienie jest eulerowskie.

5. Niech G będzie grafem na $2d + 1$ wierzchołkach, zktórych każdy ma stopień d. Pokazać, że G jest eulerowski.

6. Niech $G = (V, E)$ będzie grafem, gdzie $|V| \geq 3$, i dla każdego $v \in V$ $\delta v \geq 1/2|V|$. Pokazać, że G jest hamiltonowski.

7. Niech $G = (V, E)$ będzie grafem, gdzie $|V| \geq 4$, i dla każdego $v, w, u \in V$ conajmniej dwie krawędzie z $uv, \ vw, \ uw$ należą do E. Pokazać, że G jest hamiltonowski.

8. Niech $G = (V, E)$ będzie grafem, gdzie $|V| = n$ i $|E| > \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 4)$. Pokazać, że G jest hamiltonowski.

9. Podać przykład grafu $G = (V, E)$, gdzie $|V| = n$ i $|E| = \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 4)$, który nie jest hamiltonowski.

10. Graf $G = (V, E)$ jest semi-hamiltonowski, jeśli zawiera szlak przechodzący przez każdy wierzchołek z V dokładnie raz. Pokazać, że jeśli dla każdej pary wierzchołków niepołączonych u i v, $\delta u + \delta v \geq |V| - 1$, to G jest semi-hamiltonowski.