Propedeutyka teorii gier

Paweł Baćmaga, Dominika Kawczyńska, Maciej Janta Lipinski
Matematyka i analiza danych
Krótki kurs historii matematyki
Rok akademicki 2024/25
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska

TEORIA GIER

To matematyczna dziedzina zajmująca się analizą sytuacji, w których wynik zależy od decyzji innych graczy, w kontekście konfliktów lub współpracy. Skupia się na poszukiwaniu optymalnych rozwiązań, a nie na przyczynach konfliktów.

Początkowo rozwijała się w kontekście gier takich jak szachy czy gry karciane, ale obecnie jej zastosowania obejmują również antropologię, biologię, ekonomię, filozofię, nauki polityczne i społeczne. Mimo szerokiego zakresu zastosowań, nie jest to uniwersalne narzędzie do rozwiązywania wszelkich konfliktów. Wiele problemów jest zbyt skomplikowanych i złożonych, by mogły być one modelowane matematycznie. W związku z tym, teoria gier ma swoje ograniczenia, ale pozostaje potężnym narzędziem w wielu obszarach analizy strategicznej.

- **1713** – Waldegrave opracował rozwiązanie minimax dla gry *le her*
- **1838** – Cournot opracowuje model konkurencji w oligopoliach
- **1883** – Bertrand krytykuje model Cournota, proponując alternatywny model konkurencji cenowej
- **1913** – Zermelo dowodzi, że optymalna strategia w szachach jest ściśle określona
- **1944** – Von Neumann i Morgenstern publikują ***Teoria gier i zachowanie ekonomiczne***, fundament teorii gier
- **1950** – Nash rozwija pojęcie równowagi Nasha dla gier n-osobowych
- **1965** – Selten wprowadza równowagę subgier perfekcyjnych, udoskonalając równowagę Nasha
- **1994** – Nash, Selten i Harsanyi otrzymują Nagrodę Nobla za wkład w teorię gier
- **2005** – Schelling i Aumann otrzymują Nagrodę Nobla za wkład w teorię gier
- **2007** – Hurwicz, Maskin i Myerson otrzymują Nobla za teorię projektowania mechanizmów
- **2012** – Roth i Shapley otrzymują Nagrodę Nobla za teorię stabilnych alokacji
- **2014** – Tirole otrzymuje Nobla za badania dotyczące regulacji rynków.

Podstawowe pojęcia

- **Gra** – model sytuacji konfliktowej
- **Akcja** – decyzja jednorazowa gracza
- **Strategia** – plan akcji precyzujący jaką decyzję podjąć w każdej możliwej sytuacji w grze

Założenia potrzebne do modelu

- Istnieje co najmniej dwóch graczy.
- Każdy z graczy posiada przynajmniej dwie strategie.
- W wyniku każdej gry każdy z graczy otrzymuję pewną wypłatę, której wysokość zależy od strategii zastosowanych przez wszystkich graczy.
- Gracze są racjonalni i pragną zmaksymalizować swoją wygraną.

Wypłatę wyraża się dla wygody w liczbach.

Rodzaje gier

Podział ze względu na czas podejmowania decyzji:

- strategiczne – decyzje podejmowane jednorazowo w tym samym momencie
- ekstensywne – decyzje podejmowane sekwencyjnie z wiedzą o poprzednich ruchach swoich i innych graczy

Podział ze względu na posiadaną wiedzę:

- z kompletną informacją - gracz zna wszystkie strategie i cel swojego przeciwnika
- z niekompletną informacją - gracz nie wie jaki cel ma przeciwnik

Gry kombinatoryczne

- **Gra bezstronna** - gra, w której zasady dotyczące wyboru strategii są identyczne dla wszystkich graczy, niezależnie od tego, kto wykonuje ruch, np. gra Nim, Chomp
- **Gra stronnicza** - gra, w której zasady są zróżnicowane w zależności od tego, który gracz wykonuje ruch, np. Szachy, Hex

Gry kombinatoryczne – gry bezstronne

Gra w odejmowanie:
Mamy podaną pewną liczbę (np. 200). Gracze naprzemiennie odejmują od niej: 1,2 lub 3 (co powoduje zmniejszenie jej o podaną wartość). Przegrywa gracz, który nie może już odjąć żadnej liczby.

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**

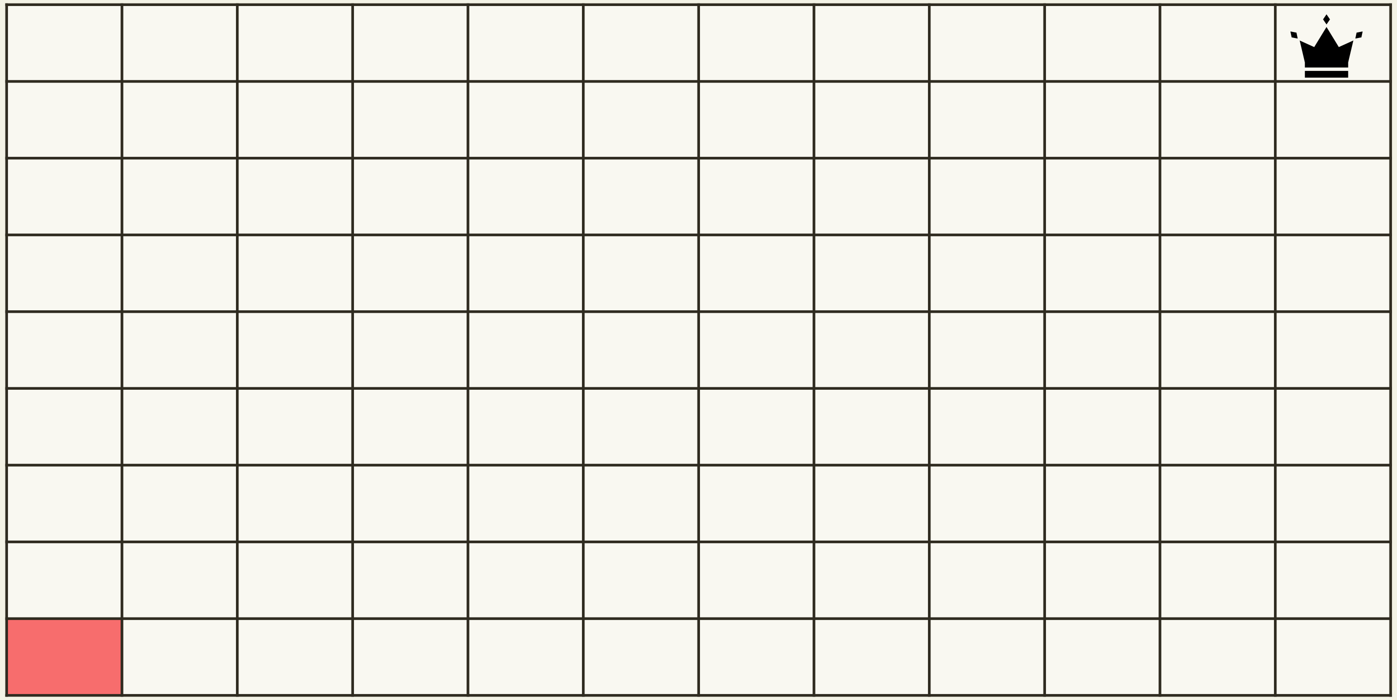
Pozycje N i P

- P-pozycje, są to pozycje, w których gracz wykonujący ruch nie może wygrać przy założeniu, że przeciwnik gra optymalnie
- N-pozycje, są to pozycje, w których gracz wykonujący ruch może wygrać, jeśli zagra optymalnie
- "P" oznacza "poprzedni", czyli gracz, który wykonał ruch do P-pozycji jest w sytuacji wygrywającej
- "N" oznacza "następny", czyli gracz, wykonujący ruch z N-pozycji jest w sytuacji wygrywającej
- Z każdej P-pozycji gracz może osiągnąć tylko N-pozycje
- Dla każdej N-pozycji istnieje P-pozycja osiągalna w jednym ruchu

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	N	N	N	P	N	N	N	P	N	N	N	P

Przykład

Gra Wythoff



Stawiamy na planszy królową, która może poruszać się o dowolną liczbę pól jednym z kierunków: w dół, w lewo, po skosie w lewo-dół. Przegrywa gracz, który nie może wykonać żadnego ruchu.

Gra Wythoff cd.

				P							
										P	
			P								
							P				
					P						
	P										
		P									

Gry o sumie zerowej macierz wypłat

	S1*	S2*	S3*	Min w wierszu
S1	4	1	-3	-3
S2	3	2	5	2
S3	0	1	6	0
Max w kolumnie	4	2	6	

- Punkty siodłowy macierzy wypłat jest to taka para (i*, j*), która spełnia zależność: $\max_i a_{ij*} = a_{i*j*} = \min_j a_{i*j}$
- Równowaga Nasha to sytuacja, w której żaden z graczy nie ma motywacji do zmiany swojej strategii, przy założeniu, że strategia pozostałych graczy pozostaje bez zmian.
- Każda skończona gra (taka która ma skończoną liczbę graczy i strategii) ma przynajmniej jedną równowagę Nasha

Strategie mieszane – gra w parzyste/nieparzyste

	P. 1	**P. 2**
NP. 1	-2	3
NP. 2	3	-4

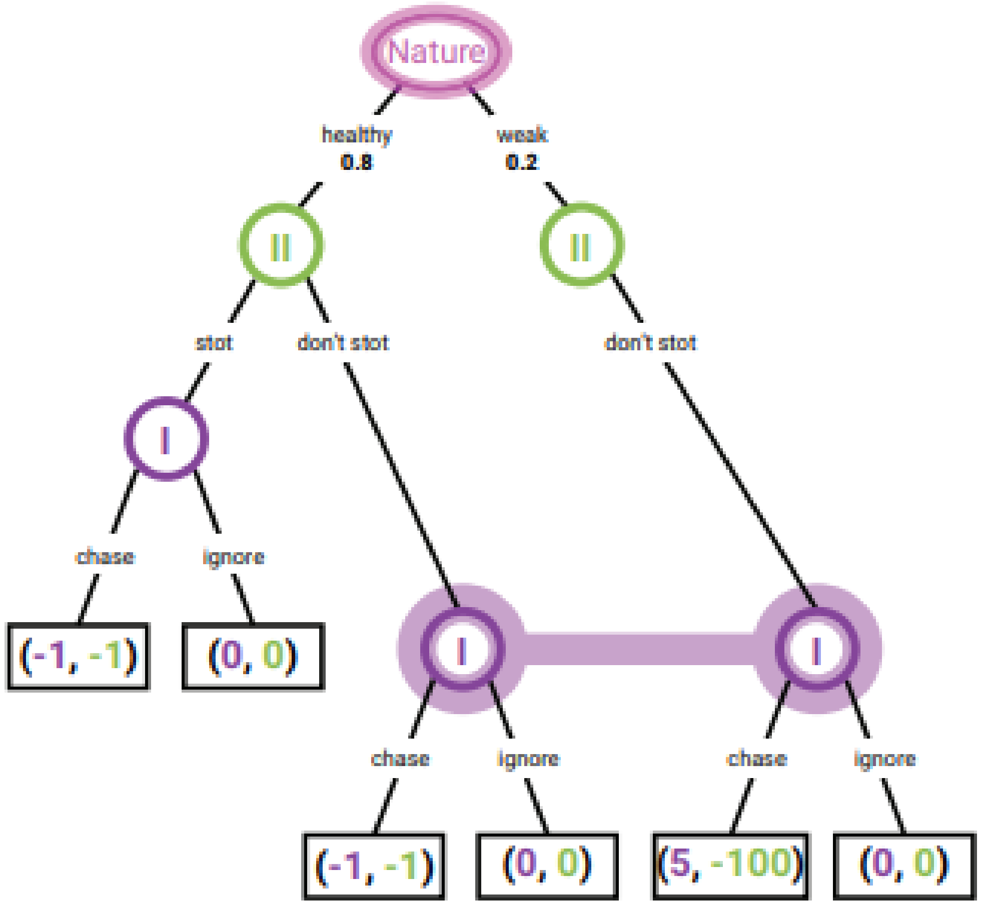
Mamy dwóch graczy, jeden to gracz nieparzysty, a drugi to parzysty. Każdy z nich ma do wyboru liczbę 1 albo 2. Jeśli suma wybranych przez nich liczb jest parzysta, to równowartość tej wartości gracz nieparzysty płaci parzystemu, gdy nieparzysta to parzysty płaci nieparzystemu. Macierz wypłat jest przedstawiona z perspektywy gracza nieparzystego w tabeli obok. Czy gra ta posiada punkt siodłowy? Czy istnieje równowaga Nasha dla tej gry?

	M	Z
M	(-1, -1)	(-4, 0)
Z	(0, -4)	(-3, -3)

Gry o sumie niezerowej – Problem więźnia

Gry w postaci ekstensywnej

Lwy i Antylopy



	K	Z
K	(3, 3)	(0, 5)
Z	(5, 0)	(1, 1)

Iterowany problem więźnia - macierz wypłat

Iterowany problem więźnia

G1	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	30
G2	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	30

G1	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	0
G2	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	50

G1	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	10
G2	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	10

Iterowany problem więźnia - strategia wet za wet

WzW	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	30
G2	K	K	K	K	K	K	K	K	K	K	30

WzW	K	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	9
G2	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	Z	14

WzW	K	K	K	K	Z	K	K	K	Z	K	25
G2	K	K	K	Z	K	K	K	Z	K	Z	30

	J	G
J	(v/2 - c, v/2 - c)	(v, 0)
G	(0, v)	(v/2, v/2)

Gołębie i Jastrzębie

Bibliografia

Źródła:

- Anna R. Karlin, Yuval Peres(December 13, 2016). Game Theory, Alive
- https://en.wikipedia.org/wiki/Game_theory
- https://en.wikipedia.org/wiki/Wythoff%27s_game