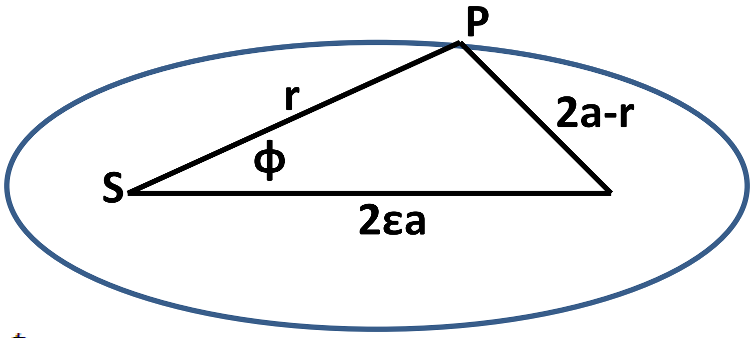
Z notatek *Royal Society*
M. Kordos *Wykłady z historii matematyki*

- **Edmund Halley**: *Jak wygląda siła, która powoduje, że planety krążą po orbitach eliptycznych ?*
- **Izaak Newton**: *Odwrotność kwadratu.*
- **Edmund Halley**: *Skąd Pan wie?*
- **Izaak Newton**: *Po prostu obliczyłem.*

Z I prawa Keplera i tw. cosinusów



$$(2a-r)^2 = r^2 + (2\varepsilon a)^2 - 2 \cdot r \cdot 2a\varepsilon \cdot \cos\varphi$$

$$r(t)(1-\varepsilon\cos\varphi(t)) = a(1-\varepsilon^2) = A \quad \text{(A)}$$

Z II prawa Keplera $$\frac{1}{2}\int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t)} r^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} r^2(\theta)\varphi'(\theta)d\theta = B(t-t_0)$$

Z podstawowego Tw. Analizy $$\frac{1}{2}r^2(t)\varphi'(t) = B \quad \text{(B)}$$

$$2r'\varphi' + r\varphi'' = 0$$

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$

$$\vec{v} = (x', y') \qquad \vec{a} = (x'', y'')$$

$$\vec{v} = (r'\cos\varphi - r\varphi'\sin\varphi, r'\sin\varphi + r\varphi'\cos\varphi)$$

$$\vec{a} = (r''\cos\varphi - 2r'\varphi'\sin\varphi - r(\varphi')^2\cos\varphi - r\varphi''\sin\varphi,$$
$$r''\sin\varphi + 2r'\varphi'\cos\varphi - r(\varphi')^2\sin\varphi + r\varphi''\cos\varphi)$$

$$\vec{a} = (r'' - r(\varphi')^2)(\cos\varphi, \sin\varphi) \qquad \vec{a} = \left(\frac{r''}{r} - (\varphi')^2\right)(x,y) = \left(\frac{r''}{r} - (\varphi')^2\right)\overrightarrow{SP}$$

Siła wywołująca ruch działa wzdłuż promienia Słońce-planeta

$$\left|\vec{F}\right| = |m \cdot \vec{a}| = m \cdot |r'' - r(\varphi')^2|$$

$$r(t)(1 - \varepsilon \cos\varphi(t)) = a(1 - \varepsilon^2) = A \quad \text{(A)}$$

$$\frac{1}{2} r^2(t)\varphi'(t) = B \quad \text{(B)}$$

Różniczkując i mnożąc przez r równanie (A)

$$rr'(1 - \varepsilon\cos\varphi) + \varepsilon r^2 \varphi' \sin\varphi = 0$$

Korzystając z równań (A) i (B)

$$Ar' + 2B\varepsilon \sin\varphi = 0$$

Różniczkując

$$Ar'' + 2B\varepsilon\varphi' \cos\varphi = 0$$

$$r'' = -\frac{2B\varepsilon\varphi'\cos\varphi}{A} = -\frac{4B^2}{r^2} \cdot \frac{\varepsilon\cos\varphi}{A}$$

Korzystając z (A) i (B) $\quad \varepsilon\cos\varphi = -\left(\frac{A}{r} - 1\right) \qquad \varphi' = \frac{2B}{r^2}$

$$r'' - r(\varphi')^2 = -\frac{4B^2}{r^2}\left(-\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{A}\right)\right) - r\frac{4B^2}{r^4} = -\frac{4B^2}{A} \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$\left|\vec{F}\right| = D \cdot \frac{1}{r^2} \cdot m \qquad D = \frac{4B^2}{A} \qquad A = a(1 - \varepsilon^2)$$

Z II prawa Keplera $\quad B = \frac{pole\ elipsy}{T} = \frac{\pi a^2\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{T}$ **Z III prawa Keplera** $\quad \frac{a^3}{T^2} = C$

$$\frac{4B^2}{A} = \frac{4\pi^2 a^4(1 - \varepsilon^2)}{T^2 a(1 - \varepsilon^2)} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = 4\pi^2 C \quad \vec{F}(t) = 4\pi^2 C \cdot \frac{1}{r^2} \cdot m \cdot (\cos\varphi(t), \sin\varphi(t))$$

Z III zasady dynamiki $\quad \left|\vec{F}(t)\right| = G \cdot \frac{M_S \cdot m_P}{r^2(t)}$