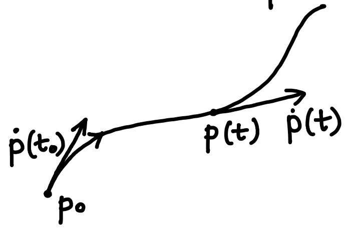
Wojciech Domitrz, Równania różniczkowe zwyczajne. Wykład 1: Podstawowe Pojęcia.

Przykłady

$\mathbb{R}^3$ przestrzeń, $p_0 \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$ – czas, $p(t)$ – położenie punktu w chwili t.

Krzywa $p(t)$ to trajektoria punktu p_0 w $\mathbb{R}^3$



$\dot{p}(t_0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} p(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p(t_0+\Delta t) - p(t_0)}{\Delta t}$ – prędkość punktu p_0 w chwili t_0, $\dot{p}(t_0) \in \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \dot{p}(t)$ krzywa w $\mathbb{R}^3$

$\ddot{p}(t_0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \dot{p}(t)$ – przyspieszenie punktu p_0 w chwili t_0.

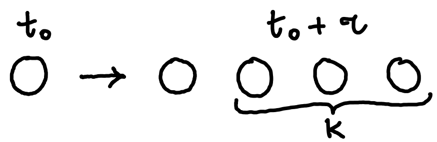
1) p_0 – punkt materialny o masie m w $\mathbb{R}^3$. $m\ddot{p}(t) = f(t, p(t), \dot{p}(t))$ $(*)$ II zasada dynamiki Newtona

$f(\cdot)$ – siła np. siła grawitacji $f = f(p(t))$, siła elektromagnetyczna $f = f(\dot{p}(t))$.

Równanie $(*)$ opisuje ruch punktu materialnego p_0. To równanie różniczkowe.

Wiąże zmienną niezależną t, zmienną zależną $p(t)$ i jej pochodne $\dot{p}(t), \ddot{p}(t)$.

2) Proces rozmnażania się bakterii



N_i – liczba bakterii w chwili $t_i = t_0 + i\tau$ $\qquad N_{i+1} = (1+k)N_i$

$N_i = (1+k)^i N_0$ Bakterie nie dzielą się w tej samej chwili

Bakterie dzielą się w różnych chwilach rozłożonych równomiernie –

liczba podziałów w $(t, t+\Delta t)$ zależy od Δt, nie zależy od t. $N(t)$ – miara gęstości bakterii w środowisku $N(t) \in \mathbb{R}$

$N(t+\Delta t) - N(t)$ – przyrost populacji w przedziale Δt. Co τ minut następuje podział określonej bakterii, co $\frac{\tau}{N(t)}$ minut podział jakiejś bakterii z $N(t)$

W czasie Δt nastąpi $\frac{\Delta t}{\left(\frac{\tau}{N(t)}\right)} = \frac{1}{\tau} N(t) \Delta t$ podziałów. Z każdego podziału z jednej bakterii k nowych.

$N(t+\Delta t) - N(t) = \frac{k}{\tau} N(t) \Delta t$ zał. $N(t)$ jest różniczkowalna $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \dot{N}(t)$

$\dot{N}(t) = \frac{k}{\tau} N(t)$ $\quad \frac{dN}{dt} = \frac{k}{\tau} N$ $\quad \frac{dN}{N} = \frac{k}{\tau} dt$ $\quad \ln N = \frac{k}{\tau} t + c$ $\quad N = e^{c} \cdot e^{\frac{k}{\tau} t}$ $\quad t_0 = 0$

$N_0 = e^{c} \cdot e^{(\frac{k}{\tau} \cdot 0)} = e^{c}$ $\quad \boxed{N(t) = N_0 e^{\frac{k}{\tau} t}}$ $\quad t = i\tau$ $\quad N(i\tau) = N_0 e^{ki}$ $\quad e^{x} \approx (1 + \frac{x}{n})^{n}$

$e^{ki} \approx (1+k)^{i}$ $\quad N(i\tau) \approx (1+k)^{i} N_0$ – dobrze przybliża przypadek dyskretny.

Definicja równania różniczkowego. F – funkcja o wartościach w $\mathbb{R}^{m}$.

Def. Równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu n nazywamy równanie

$$F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n)}) = 0$$

wiążące zmienną niezależną t, zmienną zależną x i jej pochodne $x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n)} = \frac{d^n x}{dt^n}$

$x(t) \in \mathbb{R}^{m}$

Rozwiązaniem równania nazywamy funkcję $\varphi : I \to \mathbb{R}^{m}$ klasy C^{n} na przedziale I

$F(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n)}(t)) = 0$.

Wykres funkcji $\varphi(t)$ w przestrzeni $\mathbb{R}^{m+1}$ graph $\varphi = \{ (t, x) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid t \in I \quad x = \varphi(t) \}$

nazywamy krzywą całkową równania $F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n)}) = 0$

Równanie różniczkowe zwyczajne rozwikłane ze względu na najwyższą pochodną $x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})$ można sprowadzić do równania rzędu pierwszego.

$x_0(t) = x(t)$, $x_1(t) = \dot{x}(t), \dots, x_{n-1}(t) = x^{(n-1)}(t)$ $\quad \bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \end{pmatrix}$ $\quad \dot{\bar{x}} = g(t, \bar{x})$

$$g(t, \bar{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ f(t, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \end{pmatrix}$$

Niech $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ zbiór spójny $f: G \to \mathbb{R}^n$ $\quad \dot{x} = f(t, x)$ $\quad G$ – nazywamy rozszerzoną przestrzenią fazową równania $\dot{x} = f(t, x)$. Rzut $\pi(G) = D$ gdzie $\pi(t, x) = x$ nazywamy przestrzenią fazową równania $\dot{x} = f(t, x)$. W G leżą krzywe całkowe równania.

Rozwiązaniem ogólnym równania nazywamy rodzinę funkcji $t \mapsto \varphi(t, c_1, \dots, c_n)$ sparametryzowaną n parametrami $c_1, \dots, c_n \in A \subset \mathbb{R}^n$ taką, że $\forall (c_1, \dots, c_n) \in A$ $\; t \mapsto \varphi(t, c_1, \dots, c_n)$ jest krzywą całkową równania oraz $\forall (t_0, x_0) \in G$ $\; \exists (c_1^0, \dots, c_n^0) \in A$ takie, że $x_0 = \varphi(t_0, c_1^0, \dots, c_n^0)$ (czyli $t \mapsto \varphi(t, c_1^0, \dots, c_n^0)$ jest krzywą całkową przechodzącą przez (t_0, x_0))

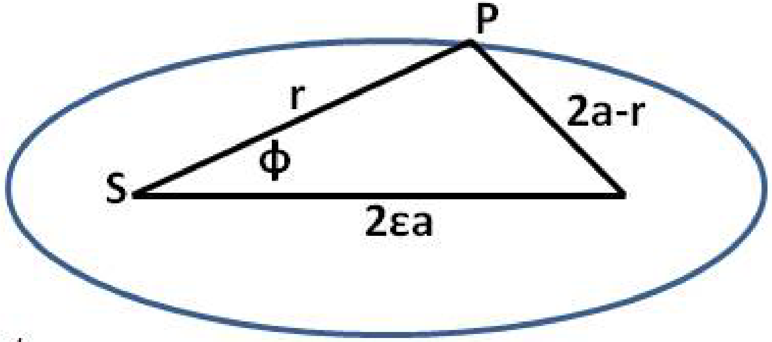
Z notatek *Royal Society*
M. Kordos *Wykłady z historii matematyki*

- **Edmund Halley**: *Jak wygląda siła, która powoduje, że planety krążą po orbitach eliptycznych ?*
- **Izaak Newton**: *Odwrotność kwadratu.*
- **Edmund Halley**: *Skąd Pan wie?*
- **Izaak Newton**: *Po prostu obliczyłem.*

Z I prawa Keplera i tw. cosinusów

$$(2a-r)^2 = r^2 + (2\varepsilon a)^2 - 2\cdot r\cdot 2a\varepsilon\cdot\cos\varphi$$

$$r(t)(1-\varepsilon\cos\varphi(t)) = a(1-\varepsilon^2) = A$$



Z II prawa Keplera $$\frac{1}{2}\int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t)} r^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} r^2(\theta)\varphi'(\theta)d\theta = B(t-t_0)$$

Z podstawowego Tw. Analizy $$\frac{1}{2}r^2(t)\varphi'(t) = B \qquad \textbf{(B)}$$

$$2r'\varphi' + r\varphi'' = 0$$

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$

$$\vec{v} = (x', y') \qquad \vec{a} = (x'', y'')$$

$$\vec{v} = (r'\cos\varphi - r\varphi'\sin\varphi, r'\sin\varphi + r\varphi'\cos\varphi)$$

$$\vec{a} = (r''\cos\varphi - 2r'\varphi'\sin\varphi - r(\varphi')^2\cos\varphi - r\varphi''\sin\varphi,$$
$$r''\sin\varphi + 2r'\varphi'\cos\varphi - r(\varphi')^2\sin\varphi + r\varphi''\cos\varphi)$$

$$\vec{a} = (r'' - r(\varphi')^2)(\cos\varphi, \sin\varphi) \qquad \vec{a} = \left(\frac{r''}{r} - (\varphi')^2\right)(x,y) = \left(\frac{r''}{r} - (\varphi')^2\right)\overrightarrow{SP}$$

Siła wywołująca ruch działa wzdłuż promienia Słońce-planeta

$$\left|\vec{F}\right| = |m \cdot \vec{a}| = m \cdot |r'' - r(\varphi')^2|$$

Różniczkując i mnożąc przez r równanie $r(t)(1 - \varepsilon\cos\varphi(t)) = a(1 - \varepsilon^2) = A$ **(A)**

$rr'(1 - \varepsilon\cos\varphi) + \varepsilon r^2\varphi'\sin\varphi = 0$ **Korzystając z równań (A) i (B)**

$Ar' + 2B\varepsilon\sin\varphi = 0$ **Różniczkując** $Ar'' + 2B\varepsilon\varphi'\cos\varphi = 0$

$$r'' = -\frac{2B\varepsilon\varphi'\cos\varphi}{A} = -\frac{4B^2}{r^2}\cdot\frac{\varepsilon\cos\varphi}{A}$$

Korzystając z (A) i (B) $\varepsilon\cos\varphi = -\left(\frac{A}{r} - 1\right)$ $\varphi' = \frac{2B}{r^2}$

$$r'' - r(\varphi')^2 = -\frac{4B^2}{r^2}\left(-\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{A}\right)\right) - r\frac{4B^2}{r^4} = -\frac{4B^2}{A}\cdot\frac{1}{r^2}$$

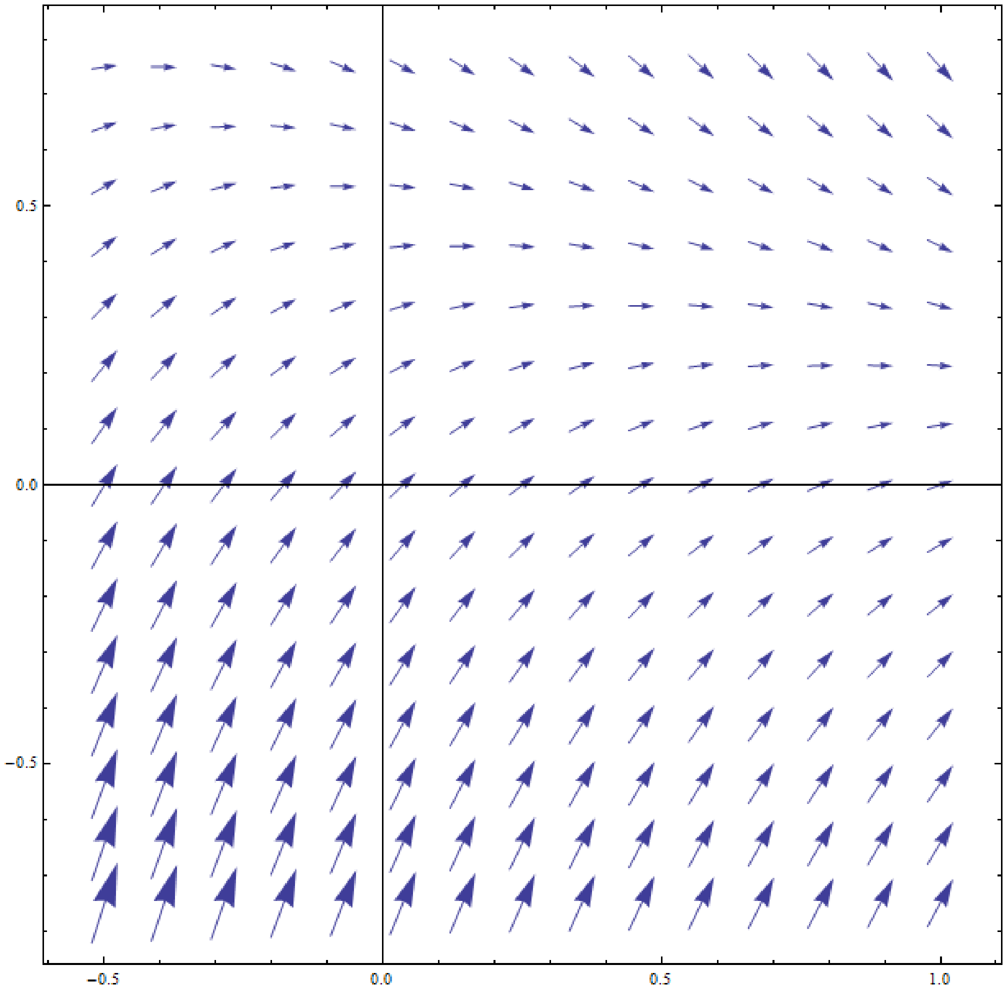
$$\left|\vec{F}\right| = D\cdot\frac{1}{r^2}\cdot m \qquad D = \frac{4B^2}{A} \qquad A = a(1 - \varepsilon^2)$$

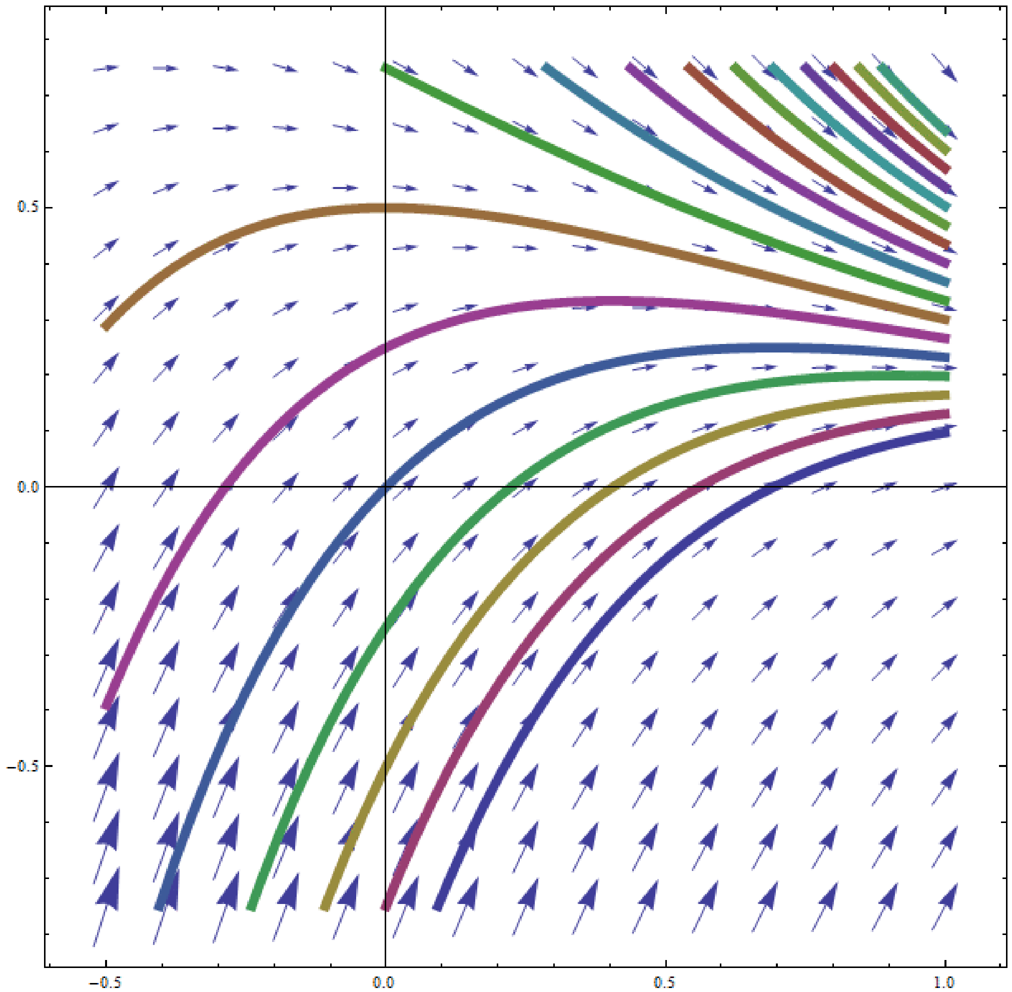
Z II prawa Keplera $B = \frac{pole\ elipsy}{T} = \frac{\pi a^2\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{T}$ **Z III prawa Keplera** $\frac{a^3}{T^2} = C$

$$\frac{4B^2}{A} = \frac{4\pi^2 a^4(1 - \varepsilon^2)}{T^2 a(1 - \varepsilon^2)} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = 4\pi^2 C \qquad \vec{F}(t) = 4\pi^2 C\cdot\frac{1}{r^2}\cdot m\cdot(\cos\varphi(t), \sin\varphi(t))$$

Z III zasady dynamiki $\left|\vec{F}(t)\right| = G\cdot\frac{M_S\cdot m_P}{r^2(t)}$

Pole kierunków równania $\dot{x} = f(t,x)$ dla $x(t) \in \mathbb{R}$ to pole postaci $V(t,x) = (1, f(t,x)) \in \mathbb{R}^2$ na płaszczyźnie. Kreśląc krzywą $t \mapsto (t, \varphi(t)) \in \mathbb{R}^2$ taką, że $\dot{\varphi}(t) = f(t,x)$, czyli styczną do pola kierunków, otrzymujemy krzywą całkową równania. (więcej w plikach RRZ - Pole_Kierunkow.cdf , SlopeFields.cdf)





Przez każdy punkt $(t_0, x_0) \in G$ przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa (styczna do pola pola kierunków w tym punkcie.

Def. Warunkiem początkowym lub warunkiem Cauchy'ego dla równania $\dot{x} = f(t,x)$ nazywamy warunek $x(t_0) = x_0$.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$ nazywamy zagadnieniem początkowym lub zagadnieniem Cauchy'ego.

Def. Rozwiązaniem zagadnienia początkowego nazywamy funkcję $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ klasy C^1 na I, $t_0 \in I$, będącą rozwiązaniem równania i $\varphi(t_0) = x_0$.

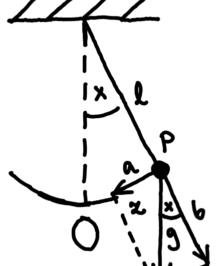
Def. Zagadnienie początkowe dla równania rzędu n ma postać

$$x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})$$

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}, \text{ gdzie } x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}^n$$

(patrz plik CauchysProblem.cdf)

Przykład. (Wahadło matematyczne)



$ma = -mg\sin x$ $\quad a = \ddot{\varkappa}$ $\quad \varkappa = xl$ – odchylenie (po łuku) od punktu O

$\ddot{x} = -\frac{g}{l}\sin x$ $\quad$ dla małych drgań $\sin x \approx x$ $\quad \begin{cases} \ddot{x} = -\frac{g}{l}x \\ x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = x_1 \end{cases}$

$x(t_0) = x_0$

$\dot{x}(t_0) = x_1$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{l}{g} x \\ x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) = x_1 \end{cases}$$ położenia w dwóch różnych chwilach $t_0 \neq t_1$.

Zagadnienie brzegowe.

Def. $\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), \text{ gdzie } f : [a, b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \\ g(x(a), x(b)) = 0, \text{ gdzie } g : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \end{cases}$ to zagadnienie brzegowe.

cd. Przykładu

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{l}{g} x \\ x(t_0) = x_0 \\ x(t_1) = x_1 \end{cases} \qquad v(t) = \dot{x}(t) \qquad y = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\frac{l}{g} x \end{pmatrix} \qquad f(t, y) = \begin{pmatrix} v \\ -\frac{l}{g} x \end{pmatrix}$$

$$y(t_0) = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \dot{x}(t_0) \end{pmatrix} \qquad y(t_1) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dot{x}(t_1) \end{pmatrix}$$

$$g(y(t_0), y(t_1)) = (x(t_0) - x_0)^2 + (x(t_1) - x_1)^2$$

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t, y) \\ (x(t_0) - x_0)^2 + (x(t_1) - x_1)^2 = 0 \end{cases}$$