

Wojciech Domitrz, Równania różniczkowe zwyczajne. Wykład 2: Metody numeryczne - schematy różnicowe.

$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) & \text{zagadnienie} \\ x(t_0) = x_0 & \text{początkowe} \end{cases}$ Rozwiązać na $[t_0, T]$, $h := \frac{T-t_0}{N}$, $t_k = t_0 + kh$ $k=0, 1, 2, \dots, N$
↑
krok całkowania

Szukamy ciągu x_k dla $k=0, 1, \dots, N$ t.że $x_k \approx x(t_k)$

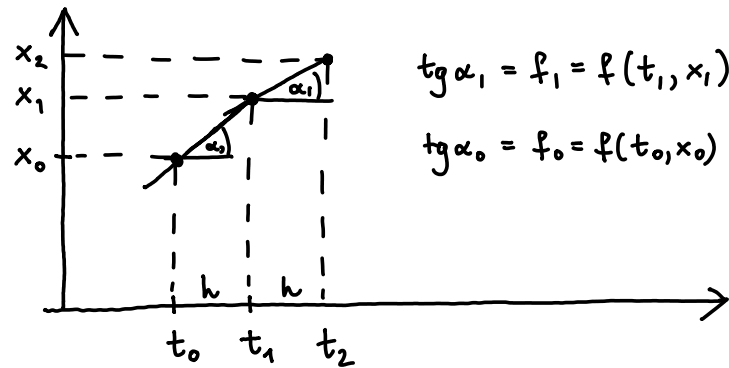
Ze wzoru Taylora $x(t+h) = x(t) + x^{(1)}(t) \cdot h + \frac{x^{(2)}(t)}{2} h^2 + \dots + \frac{x^{(m)}(t)}{m!} h^m + O(h^{m+1})$, $m=1$ $x(t+h) = x(t) + x^{(1)}(t) h + O(h^2)$ (*)

$x(t+h) = x(t) + h f(t, x(t)) + O(h^2)$. Dla $t=t_k$ $x(t_{k+1}) = x(t_k) + h f(t_k, x(t_k)) + O(h^2)$ $t_{k+1} = t_k + h$

Stąd

Schemat Eulera (otwarty lub jawny)

$x_{k+1} = x_k + h f_k$ gdzie $f_k = f(t_k, x_k)$ dla $k=0, 1, 2, \dots, N$.



Zamieniając w wzorze Taylora $t \leftrightarrow t+h$ $x(t) = x(t+h) + x^{(1)}(t+h) (-h) + O((-h)^2)$

$x(t) = x(t+h) - h f(t+h, x(t+h)) + O(h^2)$

Stąd

zamknięty Schemat Eulera (niejawny)

$x_{k+1} = x_k + h f_{k+1} = x_k + h f(t_{k+1}, x_{k+1})$

Trzeba $x_{k+1} = x_k + h f(t_{k+1}, x_{k+1})$ rozwiązać ze wzgl. na x_{k+1}

Schemat jednokrokowy to schemat postaci $x_{k+1} = x_k + h \Phi_f(h, t_k, x_k, x_{k+1})$ dla $k = 0, 1, \dots, N-1$, gdzie Φ_f - funkcja zależna od f .
 $x(t_0) = x_0$ wystarczy, aby rozpocząć schemat jednokrokowy - schemat samostartujący.

Schematy Eulera (otwarty i zamknięty) to schematy jednokrokowe.

(Patrz plik EulerMethodForExponentialFunction.cdf).

Schemat Eulera jest mało dokładny (wzór Taylora z wyrazami pierwszego stopnia)

$$\text{Dokładniej: } x(t+h) = x(t) + x^{(1)}(t)h + \frac{1}{2}x^{(2)}(t)h^2 + O(h^3) \quad x^{(1)} = f(t, x(t))$$

$$x^{(2)}(t) = \frac{d}{dt} x^{(1)}(t) = \frac{d}{dt} (f(t, x(t))) = f_t(t, x(t)) + f_x(t, x(t)) x^{(1)}(t) = f_t(t, x(t)) + f_x(t, x(t)) f(t, x(t))$$

$$x(t+h) = x(t) + h f(t, x(t)) + \frac{h^2}{2} (f_t(t, x(t)) + f_x(t, x(t)) f(t, x(t))) + O(h^3)$$

$$\text{Schemat Taylora: } x_{k+1} = x_k + h f_k + \frac{h^2}{2} f_{t,k} + \frac{h^2}{2} f_{x,k} f_k \quad \text{gdzie } f_{t,k} = f_t(t_k, x_k) \quad f_{x,k} = f_x(t_k, x_k)$$

Schemat Eulera: w każdym kroku wartość jednej funkcji f_k : mniej kosztowny

Schemat Taylora: w każdym kroku wartość 3 funkcji $f_k, f_{t,k}, f_{x,k}$: bardziej kosztowny

Schemat zawierający rozwinięcia rzędu 3: w każdym kroku wartość 6 funkcji: jeszcze kosztowniejszy

Dodawania i mnożenia bardzo mało kosztowne w porównaniu do obliczania wartości funkcji!

Schemat trapezów (zamknięty) $x_{k+1} = x_k + \frac{h}{2} (f_k + f_{k+1})$ daje lepszą dokładność niż schematy Eulera i Taylora.

Schematy Rungego - Kuty

Def. Schemat różnicowy nazywa się r -poziomym schematem Rungego - Kuty jeśli $\Phi_f(h, t, x) = \sum_{i=1}^r c_i K_i$, gdzie

$$K_i = K_i(t, x, h) = f\left(t + h \sum_{j=1}^r b_{ij}, x + h \sum_{j=1}^r b_{ij} K_j\right) \text{ dla } i=1, 2, \dots, r, \text{ } c_i, b_{ij} \in \mathbb{K} \text{ stałe.}$$

Jeśli $b_{ij} = 0$ dla $j \geq i$ $i=1, 2, \dots, r$ to schemat R-K jest schematem jawnym i

$$K_1 = f(t, x), \quad K_i = f\left(t + h \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij}, x + h \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} K_j\right) \text{ dla } i=2, \dots, r$$

Stałe b_{ij} wyznaczamy tak aby schemat R-K był zgodny z rozwinięciem Taylora max. wysokiego rzędu.

Wyznaczmy dwupoziomy otwarty schemat R-K $x_{k+1} = x_k + h(c_1 K_1 + c_2 K_2)$

$$\Phi_f(h, t, x) = x^{(1)}(t) + \frac{h}{2} x^{(2)}(t) + \frac{h^2}{6} x^{(3)}(t) + \dots$$

$$\begin{aligned} x^{(3)}(t) &= \frac{d}{dt}(x^{(2)}(t)) = \frac{d}{dt}(f_t(t, x) + f_x(t, x) \cdot f(t, x)) = f_{tt} + f_{tx} x^{(1)} + (f_{xt} + f_{xx} \cdot x^{(1)}) f + f_x (f_t + f_x f) = \\ &= f_t f_x + f(f_x)^2 + f_{tt} + 2 f f_{tx} + f^2 f_{xx} \end{aligned}$$

$$(*) \quad \Phi_f(h, t, x) = f + \frac{1}{2} h (f_t + f_x f) + \frac{1}{6} h^2 (f_t f_x + f(f_x)^2 + f_{tt} + 2 f f_{tx} + f^2 f_{xx}) + \dots$$

$$g(u_1 + h_1, u_2 + h_2) = g(u_1, u_2) + \sum_{i+j=k} \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^k g}{\partial u_1^i \partial u_2^j}(u_1, u_2) h_1^i h_2^j + o(\sqrt{h_1^2 + h_2^2}^{k+1})$$

$$K_1 = f(t, x) = f \quad K_2 = f(t + h a_2, x + h a_2 K_1)$$

$$K_2 = f(t, x) + f_t(t, x) h a_2 + f_x(t, x) h a_2 K_1 + \frac{1}{2} (f_{tt}(t, x) h^2 a_2^2 K_1 + 2 f_{tx}(t, x) h^2 a_2^2 K_1 + f_{xx}(t, x) h^2 a_2^2 K_1^2) + o(h^2)$$

$$(**) \quad \Phi_f = c_1 K_1 + c_2 K_2 = (c_1 + c_2) f + h c_2 a_2 (f_t + f f_x) + \frac{1}{2} h^2 c_2 a_2^2 (f_{tt} + 2 f f_{tx} + f^2 f_{xx}) + o(h^2)$$

Porównując z (*) otrzymujemy, że (*) i (**) pokrywają się do rzędu h jeżeli $c_1 + c_2 = 1$ i $c_2 a_2 = \frac{1}{2}$

Istnieje 1-parametryczna rodzina $c_1 = 1 - c_2$ $a_2 = \frac{1}{2c_2}$ schematów R-K dwupoziomowych, które

są dokładne do rzędu h^2 i żaden z nich nie może być dokładny do wyrazów rzędu h , bo wyrazy $f_t f_x$ i $f(f_x)^2$ nie występują (**).

Zmodyfikowany schemat Eulera ($c_1 = 0, c_2 = 1, a_2 = \frac{1}{2}$)

$$x_{k+1} = x_k + h f\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2} f_k\right)$$

Schemat Heuna ($c_1 = c_2 = \frac{1}{2}, a_2 = 1$)

$$x_{k+1} = x_k + \frac{h}{2} f_k + \frac{h}{2} f\left(t_{k+1}, x_k + h f_k\right)$$

Dla ustalonego r istnieją wieloparametrowe rodziny schematów R-K r -poziomych.

Formalny rząd schematu to największy z rządów wyrazów w rozwinięciu Taylora uwzględnionych w schemacie.

Formalny rząd schematu $\leq r$ - liczba poziomów

Dla $r \geq 5$ Formalny rząd schematu $< r$

Dwa najpopularniejsze otwarte (jawne), 4-poziomowe schematy Rungego-Kutty ($r=4$)

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \frac{h}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = f(t_k, x_k), \quad K_2 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2} K_1\right), \quad K_3 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, x_k + \frac{h}{2} K_2\right), \quad K_4 = f(t_k + h, x_k + h K_3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \frac{h}{8} (K_1 + 3K_2 + 3K_3 + K_4) \\ K_1 = f(t_k, x_k), \quad K_2 = f\left(t_k + \frac{h}{3}, x_k + \frac{h}{3} K_1\right), \quad K_3 = f\left(t_k + \frac{2}{3}h, x_k - \frac{h}{3} K_1 + h K_2\right) \\ K_4 = f\left(t_k + h, x_k + h K_1 - h K_2 + h K_3\right) \end{cases}$$

Zamknięty (niejawny) 2-poziomowy schemat Rundego-Kutty (przykład)

$$x_{k+1} = x_k + \frac{1}{2} h (K_1 + K_2)$$

$$K_1 = f\left(t_k + h\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right), x_k + \frac{1}{4} h K_1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right) h K_2\right)$$

$$K_2 = f\left(t_k + h\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right), x_k + \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right) h K_1 + \frac{1}{4} h K_2\right)$$

} K_1, K_2 nie są dane jawnie!

jest to schemat rzędu h^4 !

Ogólnie istnieją schematy zamknięte R-K, które dla s -poziomów są rzędu h^{2s} .

Nada schematów zamkniętych to większa złożoność, zaleta to większa dokładność.

Schematy wielokrokowe

$$\begin{cases} x(t+h) = x(t) + h x^{(1)}(t) + \frac{h^2}{2} x^{(2)}(t) + O(h^3) \\ x(t-h) = x(t) - h x^{(1)}(t) + \frac{h^2}{2} x^{(2)}(t) + O(h^3) \end{cases}$$

$$x(t+h) - x(t-h) = 2h x^{(1)}(t) \quad \text{dla } t = t_k$$

$$x_{k+1} = x_{k-1} + 2h f_k - \text{schemat punktu środkowego otwarty rzędu } h^2$$

Do startu potrzebne są x_0 i x_1 (x_0 nie wystarczy)

Def. Liniowe schematy wielokrokowe to schematy postaci

$$\alpha_q x_{k+q} + \dots + \alpha_1 x_{k+1} + \alpha_0 x_k = h (\beta_q f_{k+q} + \dots + \beta_1 f_{k+1} + \beta_0 f_k) \quad \text{dla } k=0,1,\dots$$

$\alpha_q \neq 0$ i $|\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0$ to q jest liczbą kroków schematu

Schemat q -krokowy jest zamknięty jeśli $\beta_q \neq 0$ w p.p. jest otwarty

Do startu schematu q -krokowego potrzeba q warunków początkowych x_0, x_1, \dots, x_{q-1}

Schematy Adamsa to schematy postaci:

$$x_{k+q} = x_{k+q-1} + h \sum_{j=0}^q \beta_j f_{k+j}$$

Jeśli $\beta_q \neq 0$ to są to schematy zamknięte (Adamsa-Moultona)

Jeśli $\beta_q = 0$ to są to schematy otwarte (Adamsa-Bashfortha)

Wartości współczynników β_j :

Schematy otwarte Adamsa - Bashfortha

q	j	0	1	2	3
1		1			
2		$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$		
3		$\frac{5}{12}$	$-\frac{16}{12}$	$\frac{23}{12}$	
4		$-\frac{9}{24}$	$\frac{37}{24}$	$-\frac{59}{24}$	$\frac{55}{24}$

Schematy zamknięte Adamsa - Moultona

q	j	0	1	2	3	4
1		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
2		$-\frac{1}{12}$	$\frac{8}{12}$	$\frac{5}{12}$		
3		$\frac{1}{24}$	$-\frac{5}{24}$	$\frac{19}{24}$	$\frac{9}{24}$	
4		$-\frac{19}{720}$	$\frac{106}{720}$	$-\frac{264}{720}$	$\frac{646}{720}$	$\frac{251}{720}$

Obliczanie współczynników metod wielokrotnych

$$x(t_{k+r}) = x(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_{k+r}} f(s, x(s)) ds$$

$f(s, x(s))$ przybliżamy wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a P_q stopnia q o węzłach t_k, \dots, t_{k-q}

$$P_q(s) = \sum_{j=0}^q f(t_{k-j}, x(t_{k-j})) l_j(s) \quad l_j(s) = \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq j}}^q \frac{s - t_{k-m}}{t_{k-j} - t_{k-m}}$$

aprosymujemy $x(t_{k-j}) \approx x_{k-j}$

$$x(t_{k+r}) = x(t_{k-1}) + \sum_{j=0}^q f_{k-j} \int_{t_{k-j}}^{t_{k+r}} l_j(s) ds \quad t_{k+i} = t_k + ih$$

Stąd otrzymujemy współczynniki β_j ze wzorach Adamsa

Koszt schematów wielokrotnych nie jest większy niż schematów jednokrotnych. W każdym kroku oblicza się tylko jedną wartość funkcji, ale trzeba pamiętać $q-1$ z poprzednich kroków. Potrzebna jest tylko większa pamięć.

Schematy typu predyktor - korektor

- 1) schematem jawnym (1-lub wielokrokowym) wyznaczony $\tilde{x}_{k+1} = \tilde{F}(x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-i})$ (predyktor)
- 2) przyjmujemy \tilde{x}_{k+1} za pierwsze przybliżenie w iteracyjnym rozwiązaniu równania dla schematu zamkniętego
 $x_{k+1} = F(x_{k+1})$ (korektor)

Uwaga! oba schematy (predyktor i korektor) powinny być tego samego rzędu!

Dokładność metody \rightarrow składnik o niższym rzędzie

Koszt metody \rightarrow składnik o wyższym rzędzie

Zadanie.

Dany jest schemat 2-poziomowy typu R-K.

$$x_{k+1} = x_k + h(c_1 K_1 + c_2 K_2)$$

$$K_1 = f(t_k + a_1 h, x_k) \quad K_2 = f(t_k + a_2 h, x_k + b h K_1)$$

Wyznaczyć stałe a_1, a_2, b, c_1, c_2 tak aby był on rzędu 2.