Wojciech Domitrz Równania różniczkowe zwyczajne Wykład 3 : Wyznaczanie rozwiązań pewnych typów równań

Równania o zmiennych rozdzielonych $\dot{x} = g_1(t) \cdot g_2(x)$

$\frac{dx}{dt} = g_1(t) \cdot g_2(x)$ $\quad g_2(x) \neq 0$ $\quad \frac{dx}{g_2(x)} = g_1(t)\,dt$ $\quad \int_{x_0}^{x} \frac{d\psi}{g_2(\psi)} = \int_{t_0}^{t} g_1(\tau)\,d\tau$ $\quad \frac{d}{dx} G_2(x) = \frac{1}{g_2(x)}$ $\quad \frac{d}{dt} G_1(t) = g_1(t)$

$G_2(x) - G(x_0) = G_1(t) - G_1(t_0)$ $\quad \frac{d}{dx} G_2(x) = \frac{1}{g_2(x)} \neq 0$ $\quad G_2$ jest monotoniczna

$x(t) = G_2^{-1}\left(G_1(t) - G_1(t_0) + G_2(x_0)\right)$ $\quad x_0 = x(t_0)$

Otrzymaliśmy

Tw. zał. $g_1 : (a,b) \to \mathbb{R}$, $g_2 : (c,d) \to \mathbb{R}$ ciągłe $\forall x \in (c,d)$ $g_2(x) \neq 0$

Teza $\forall (t_0, x_0) \in (a,b) \times (c,d)$ istnieje dokładnie jedna krzywa całkowa równania

$\dot{x} = g_1(t) \cdot g_2(x)$ przechodząca przez (t_0, x_0).

$x(t) = G_2^{-1}\left(G_1(t) - G_1(t_0) + G_2(x_0)\right)$, gdzie $G_1(t)$ jest funkcją pierwotną $g_1(t)$

$G_2(x)$ jest funkcją pierwotną $\frac{1}{g_2(x)}$

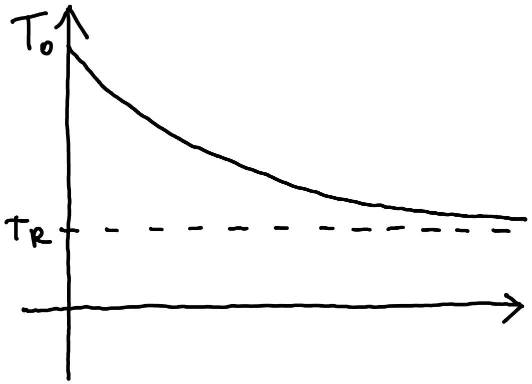
Przykład. 1 Prawo stygnięcia (Newtona)

$\frac{dT}{dt} = -k\cdot(T-T_R)$ t - czas, T_R - temperatura otoczenia, $T(t)$ - aktualna temperatura układu $T(t) > T_R$, $k > 0$

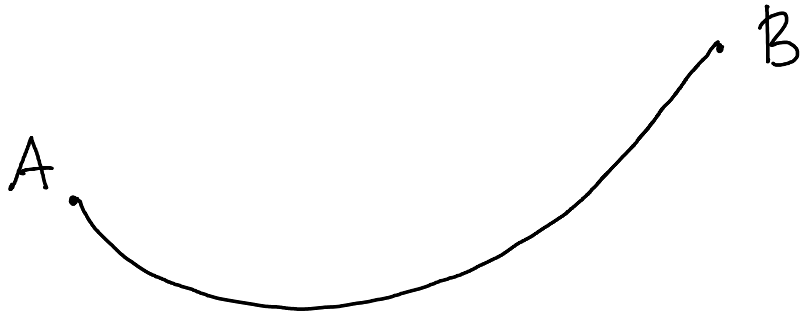
$T_R = const.$

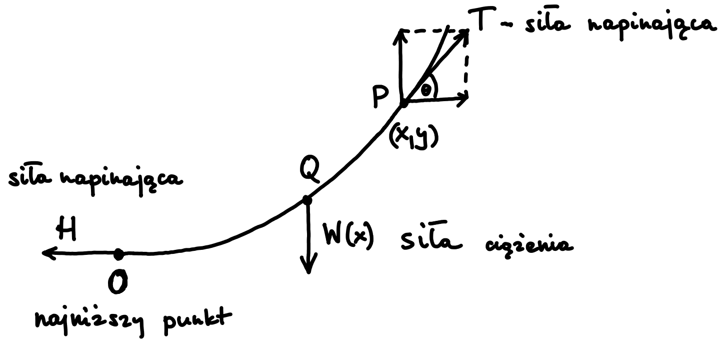
$\frac{dT}{T-T_R} = -k\,dt$ $\ln(T-T_R) = -kt + C$ $T - T_R = e^{-kt+C} = e^C \cdot e^{-kt}$ $T = T_R + De^{-kt}$ $T(0) = T_0$

$T_0 = T_R + D$ $D = T_0 - T_R$ $T = T_R + (T_0 - T_R)e^{-kt}$ $\lim_{t\to\infty} T(t) = T_R$



Przykład 2. Kształt elastycznej liny zawieszonej między dwoma punktami A, B





$$\begin{cases} T\sin\theta = W \\ T\cos\theta = H \end{cases} \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{W(x)}{H} \qquad H = \text{const}, \text{ bo } O \text{ jest ustalony}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{dy}{dx} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{W(x)}{H} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{H}\frac{dW}{dx}$$

$\frac{dW}{dx}$ - gęstość siły ciążenia $\quad \frac{dW}{ds} = \rho = \text{const}$ (jednorodność gęstości liny) $\quad s$ - długość łuku

$$\frac{dW}{ds} = \frac{dW}{dx}\frac{dx}{ds} = \rho \qquad \frac{dW}{dx} = \rho\frac{ds}{dx} \qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \qquad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \qquad \frac{dW}{dx} = \rho\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho}{H}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \qquad p = \frac{dy}{dx} \qquad \frac{dp}{dx} = \frac{\rho}{H}\sqrt{1+p^2} \qquad \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{\rho}{H}dx \qquad p + \sqrt{1+p^2} = u \qquad \left(1 + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)dp = du$$

$$\frac{p + \sqrt{1+p^2}}{\sqrt{1+p^2}}\,dp = du \qquad \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{du}{u} \qquad \int\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int\frac{du}{u} = \ln\left(p + \sqrt{1+p^2}\right) + c$$

$$\ln\left(p + \sqrt{1+p^2}\right) = \frac{\rho x}{H} + c \qquad p + \sqrt{1+p^2} = D e^{\frac{\rho}{H}x} \qquad p = \frac{dy}{dx}(0) = 0$$

w punkcie O styczne do liny poziome

$$1 = D \qquad p + \sqrt{1+p^2} = e^{\frac{\rho}{H}x}$$

$$\sqrt{1+p^2} = e^{\frac{\rho}{H}x} - p \qquad 1 + p^2 = e^{2\frac{\rho}{H}x} - 2pe^{\frac{\rho}{H}x} + p^2 \qquad 2pe^{\frac{\rho}{H}x} = e^{2\frac{\rho}{H}x} - 1 \qquad p = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\rho}{H}x} - e^{-\frac{\rho}{H}x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\rho}{H}x} - e^{-\frac{\rho}{H}x}\right) \qquad y = \frac{H}{2\rho}\left(e^{\frac{\rho}{H}x} + e^{-\frac{\rho}{H}x}\right) + C_1 = \frac{H}{2\rho}\cosh\left(\frac{\rho}{H}x\right) + C_1 \qquad y(0) = 0 \qquad y(0) = \frac{H}{\rho} + C_1 \qquad C_1 = -\frac{H}{\rho}$$

$$y = \frac{H}{2\rho}\left(\cosh\frac{\rho}{H}x - 2\right)$$

Równania jednorodne

Def. Niech $D \subset \mathbb{R}^2$. Funkcja $f: D \to \mathbb{R}$ jest jednorodna stopnia m jeśli

$$\forall_{(x,y)\in D}\ \forall_{t\geq 0}\quad (tx,ty)\in D \Rightarrow f(tx,ty)=t^m f(x,y)$$

Def. Równanie różniczkowe $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ nazywamy jednorodnym stopnia m, jeśli funkcje $M(x,y)$ i $N(x,y)$ są jednorodne stopnia m.

Uwaga! Równanie $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ jest równoważne równaniu $\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ lub $\frac{dx}{dy} = -\frac{N(x,y)}{M(x,y)}$.

Tw. Zał. $M: Q \to \mathbb{R}$, $N: Q \to \mathbb{R}$ funkcje ciągłe na zbiorze $Q = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a < \frac{y}{x} < b\}$

i $\forall_{(x,y)\in Q}\quad xM(x,y) + yN(x,y) \neq 0$.

Teza. $\forall_{(x_0,y_0)\in Q}$ istnieje dokładnie jedna krzywa całkowa równania $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ przechodząca przez (x_0,y_0).

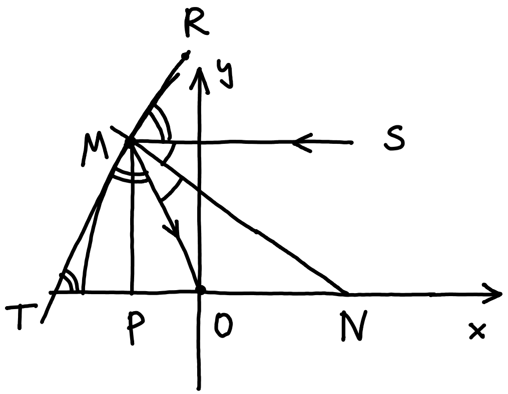
Dowód.: $u = \frac{y}{x}$ $\quad y = u\cdot x \quad$ $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = M(x,ux)\,dx + N(x,u)\,d(ux) = x^m M(1,u)\,dx + x^m N(1,u)(x\,du + u\,dx) = 0$

$$M(1,u)\,dx + N(1,u)(x\,du + u\,dx) = 0 \qquad (M(1,u)+N(1,u)u)\,dx = -N(1,u)\,x\,du \qquad \frac{dx}{x} = -\frac{N(1,u)}{M(1,u)+N(1,u)}\,du$$

$$\ln|x| = G(u) + C,\ \text{gdzie}\quad G'(u) = \frac{-N(1,u)}{M(1,u)+N(1,u)} \qquad \ln|x_0| = G\left(\frac{y_0}{x_0}\right) + C \qquad C = \ln|x_0| - G\left(\frac{y_0}{x_0}\right)$$

$\ln|x| = G\left(\frac{y}{x}\right) - G\left(\frac{y_0}{x_0}\right) + \ln|x_0| \leftarrow$ krzywa całkowa przechodząca przez (x_0,y_0) $\blacksquare$

Przykład. Znaleźć kształt zwierciadła, które wiązkę promieni równoległych skupia w jednym punkcie



prawo Snelliusa $\measuredangle SMN = \measuredangle NMO$

$SM \parallel NO \Rightarrow \measuredangle SMR = \measuredangle NTM$ i $\measuredangle SMR = \measuredangle OMT$

$\Rightarrow \measuredangle NTM = \measuredangle OMT \Rightarrow \Delta TOM$ równoramienny $\Rightarrow |OT| = |OM|$

$y = y(x)$ opisuje kształt zwierciadła

$y' = \operatorname{tg} \measuredangle MTO = \dfrac{|MP|}{|PT|}$ $\quad |MP| = y \quad |PT| = |OT| - |OP| = |OM| - |OP|$

$|OP| = -x \quad |OM| = \sqrt{x^2+y^2}$

$y' = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2} + x}$ $\quad y\,dx - \left(\sqrt{x^2+y^2} + x\right) dy = 0$ równanie jednorodne stopnia 1

$\sqrt{(tx)^2+(ty)^2} + tx = t\left(\sqrt{x^2+y^2} + x\right)$

$x = vy \quad y(y\,dv + v\,dy) = \left(\sqrt{v^2y^2+y^2} + vy\right) dy \quad y\,dv + v\,dy = \left(\sqrt{v^2+1} + v\right) dy \quad y\,dv = \sqrt{v^2+1}\,dy$

$\displaystyle\int \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = \int \frac{dy}{y} \quad \ln\left(v + \sqrt{1+v^2}\right) = \ln y + c_1 \quad v + \sqrt{1+v^2} = c_2 y \quad c_2 = \ln c_1 \quad \frac{x}{y} + \sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}} = c_2 y$

$x + \sqrt{x^2+y^2} = c_2 y^2 \quad \sqrt{x^2+y^2} = c_2y^2 - x \quad x^2+y^2 = c_2^2y^4 - 2c_2y^2x + x^2 \quad y^2 = c_2^2y^4 - 2c_2y^2x \;/ : y^2$

$1 = c_2^2y^2 - 2c_2x \quad x = \frac{c_2}{2}y^2 - \frac{1}{2c_2}$ – parabola o osi symetrii OX

Po obrocie dookoła osi OX otrzymujemy paraboloidę obrotową – kształt zwierciadła.

Równanie różniczkowe zupełne

$f(x,y) = C \qquad C = \text{const} \qquad f(x(t),y(t)) = \text{const}. \qquad \frac{d}{dt} f(x(t),y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))\, y'(t) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{dy}{dt} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dy = 0$

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \qquad (*)$

Kiedy istnieje taka funkcja $f(x,y)$, że $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$?

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) \qquad M_y = \frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = N_x$

Tw. zał. $Q = (a,b) \times (c,d) \subset \mathbb{R}^2 \qquad M, N, \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x} : Q \to \mathbb{R}$ funkcje ciągłe

$\forall (x,y) \in Q \quad M(x,y) \neq 0$ lub $\forall (x,y) \in Q \quad N(x,y) \neq 0$

Teza $\quad \forall (x,y) \in Q \quad \frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) \implies \forall (x_0,y_0) \in Q$ istnieje dokładnie jedna krzywa całkowa równania $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ przechodząca przez (x_0,y_0).

Dowód.: Szukamy takiej funkcji $f : Q \to \mathbb{R}$, że

$$\forall (x,y) \in Q \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \quad i \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$$

Wtedy $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dy = 0$ czyli $f(x,y) = \text{const}.$

Jeżeli $\forall (x,y) \in Q$ $M(x,y) \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \neq 0$ (z Tw. o f. uwikłanej) $\Rightarrow \exists I \subset [c,d]$ $y_0 \in I$ $\exists \varphi : I \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = f(x_0,y_0) \Leftrightarrow x = \varphi(y)$

Analogicznie jeżeli $\forall (x,y)$ $N(x,y) \neq 0$

$f(\varphi(y), y) = f(x_0, y_0)$ $\frac{d}{dy}\left(f(\varphi(y),y)\right) = 0$ $\frac{\partial f}{\partial x}\varphi'(x) + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ $\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dy} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ $\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$ $M\,dx + N\,dy = 0$

czyli $x = \varphi(y)$ jest szukaną krzywą całkową.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = M(x,y)$ $f(x,y) = f(x_0,y_0) + \int_{x_0}^{x} M(s,y)\,ds + C(y)$ $C(0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M}{\partial y}(s,y)\,ds + C'(y)$

$N(x,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N}{\partial s}(s,y)\,ds + C'(y) = N(x,y) - N(x_0,y) + C'(y)$ $C'(y) = N(x_0,y)$ $C(0) = 0$ $C(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0,t)\,dt$

$f(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(s,y)\,ds + \int_{y_0}^{y} N(x_0,t)\,dt + f(x_0,y_0)$ $f(x,y) = f(x_0,y_0)$

Krzywa całkowa przechodząca przez (x_0,y_0) spełnia równanie:

$$\int_{x_0}^{x} M(s,y)\,ds + \int_{y_0}^{y} N(x_0,t)\,dt = 0 \quad \blacksquare$$

Czynnik całkujący

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ Szukamy takiej funkcji $\mu(x,y)$ (- czynnika całkującego), żeby równianie $\mu(x,y)\,M(x,y)\,dx + \mu(x,y)\,N(x,y)\,dy = 0$ było równaniem różniczkowym zupełnym

Warunek na R.R. zupełne $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$ (*) $M\frac{\partial\mu}{\partial y} - N\frac{\partial\mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$ - RR Cząstkowe nie jest łatwiejsze

Przypadki kiedy można rozwiązać to $\mu=\mu(x)$, $\mu=\mu(y)$, $\mu=\mu(z(x,y))$

1) zał. $\mu=\mu(x)$ wtedy (*) $-N\frac{d\mu}{dx} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$ $\frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$

$\frac{d\mu}{\mu}$ ma zależeć tylko od x $(\mu=\mu(x))$. Stąd $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$ - musi zależeć tylko od x (nie zależy od y)

$$\ln|\mu(x)| = \int_{x_0}^{x}\frac{1}{N(s,y)}\left(\frac{\partial M}{\partial y}(s,y) - \frac{\partial N}{\partial x}(s,y)\right)ds \qquad \mu(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{1}{N(s,y)}\left(\frac{\partial M}{\partial y}(s,y) - \frac{\partial N}{\partial x}(s,y)\right)ds\right)$$

pod warunkiem, że $\frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)\right)$ - nie zależy od y.

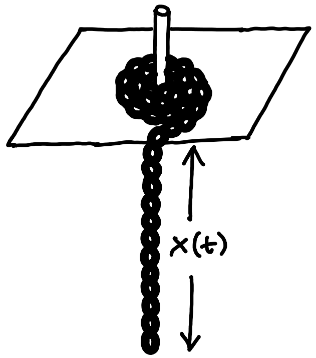
Analogicznie $\mu=\mu(y)$ $\mu(y) = \exp\left(\int_{y_0}^{y}\frac{1}{M(x,t)}\left(\frac{\partial N}{\partial x}(x,t) - \frac{\partial M}{\partial y}(x,t)\right)dt\right)$ pod warunkiem, że $\frac{1}{M(x,y)}\left(\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)\right)$ nie zależy od x.

$\mu=\mu(z(x,y))$ $M\frac{d\mu}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} - N\frac{d\mu}{dz}\frac{\partial z}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$ $\frac{d\mu}{dz}\left(M\frac{\partial z}{\partial x} - N\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$

$\frac{d\mu}{\mu} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\Big/\left(M\frac{\partial z}{\partial x} - N\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ $\frac{d\mu}{\mu}$ jest funkcją z $\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\Big/\left(M\frac{\partial z}{\partial x} - N\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ ma być funkcją z

$$h(z(x,y)) = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\Big/\left(M\frac{\partial z}{\partial x} - N\frac{\partial z}{\partial y}\right) \qquad \mu = \exp\left(\int_{z(x_0,y_0)}^{z(x,y)} h(z)\,dz\right)$$

Rozwijający się spadający łańcuch



$m(t)$ – masa spadającej części łańcucha w chwili t

$x(t)$ – długość spadającej części łańcucha w chwili t

ϱ – gęstość liniowa łańcucha (g/m – waga 1 m łańcucha)

$m(t) = \varrho \cdot x(t)$

$p(t)$ – pęd spadającej części łańcucha

$v(t)$ – prędkość spadania

$$p(t) = m(t)\, v(t) \qquad v(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$F = m(t) g = \frac{dp}{dt} = \frac{d(m(t)\cdot v(t))}{dt} = v(t)\cdot\frac{dm}{dt} + m(t)\frac{dv}{dt}$$

$$\varrho\cdot x(t)\cdot g = v(t)\,\frac{d(\varrho x(t))}{dt} + \varrho x(t)\frac{dv}{dt} = \varrho\, v(t)\frac{dx}{dt} + \varrho\, x(t)\frac{dv}{dt}$$

$$\varrho\, x(t)\, g = \varrho (v(t))^2 + \varrho\, x(t)\frac{dv}{dt} \quad /:\varrho \qquad x(t)\cdot g = (v(t))^2 + x(t)\,\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$x(t)\cdot g = (v(t))^2 + x(t)\cdot v(t)\cdot\frac{dv}{dx} \qquad x\cdot g = v^2 + x v\frac{dv}{dx}$$

$$(v^2 - xg)dx + xv\, dv = 0 \qquad M(x,v) = v^2 - xg \qquad N(x,v) = xv \qquad \frac{\partial M}{\partial v} = 2v \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = v$$

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial v} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{xv}(2v - v) = \frac{1}{x} \qquad \mu = \mu(x) \qquad \mu(x) M(x,v)\,dx + \mu(x)\, N(x,v)\, dv = \mu(x)(v^2 - xg)dx + \mu(x) x v\, dv = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\big(\mu(x)(v^2 - xg)\big) = \frac{\partial}{\partial x}\big(\mu(x) x v\big) \qquad 2\mu v = \frac{d\mu}{dx} x v + \mu v \qquad x v\frac{d\mu}{dx} = \mu v \qquad \frac{d\mu}{dx} = \frac{\mu}{x} \qquad \frac{d\mu}{\mu} = \frac{dx}{x} \qquad \ln|\mu| = \ln|x| + C \qquad |\mu| = c_1\cdot|x|$$

$$\mu = c_2 x \qquad \text{np. } \mu = x \qquad x(v^2 - xg)\, dx + x^2 v\, dv = 0$$

$$(xv^2 - x^2 g)\,dx + x^2 v\,dv = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = xv^2 - x^2 g \qquad f(x,v) = \int_{x_0}^{x} sv^2 - s^2 g\,ds + f(x_0,v_0) + C(v) \qquad C(v_0) = 0$$

$$f(x,v) = \frac{s^2}{2}v^2\Big|_{x_0}^{x} - \frac{s^3}{3}g\Big|_{x_0}^{x} + f(x_0,v_0) + C(v) = \frac{x^2v^2}{2} - \frac{x_0^2v^2}{2} - \frac{x^3}{3}g + \frac{x_0^3}{3}g + f(x_0,v_0) + C(v)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = x^2 v - x_0^2 v + \frac{dC}{dv} = x^2 v \qquad \frac{dC}{dv} = x_0^2 v \qquad C(v) = \frac{x_0^2 v^2}{2} + D \qquad C(v_0) = \frac{x_0^2 v_0^2}{2} + D = 0$$

$$D = -\frac{x_0^2 v_0^2}{2} \qquad C(v) = \frac{x_0^2 v}{2} - \frac{x_0 v_0^2}{2}$$

$$f(x,y) = \frac{x^2v^2}{2} - \frac{x_0^2v_0^2}{2} - \frac{g}{3}x^3 + \frac{g}{3}x_0^3 + f(x_0,v_0) \qquad f(x,y) = f(x_0,v_0) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{x^2v^2}{2} - \frac{x_0^2v_0^2}{2} - \frac{g}{3}x^3 - \frac{g}{3}x_0^3 = 0$$

$$\frac{x^2v^2}{2} = \frac{g}{3}(x^3 - x_0^3) + \frac{x_0^2v_0^2}{2} \qquad x^2v^2 = \frac{2}{3}g(x^3 - x_0^3) + x_0^2v_0^2 \qquad xv = \left(\frac{2}{3}g(x^3 - x_0^3) + x_0^2v_0^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$v = \frac{\left(\frac{2}{3}g(x^3 - x_0^3) + x_0^2v_0^2\right)^{\frac{1}{2}}}{x}$$