Wojciech Domitrz, Równania różniczkowe zwyczajne Wykład 4: Twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności

Kontrakcje

Def. X - zbiór ($X \neq \emptyset$). Funkcję $\varrho : X \times X \mapsto \mathbb{R}$ nazywamy metryką na X jeśli

1) $\forall\, x,y \in X \quad \varrho(x,y) \geq 0$
2) $\forall\, x,y \in X \quad \varrho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3) $\forall\, x,y \in X \quad \varrho(x,y) = \varrho(y,x)$
4) $\forall\, x,y,z \in X \quad \varrho(x,y) \leq \varrho(x,z) + \varrho(z,y)$

(X, ϱ) - nazywamy przestrzenią metryczną.

Przykłady: 1) $X = \mathbb{R}^2 \quad \varrho(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ 2) $X = \mathbb{R}^3 \quad \varrho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (x_i - y_i)^2}$

3) $X = \mathbb{R}^n \quad \varrho_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 4) $X = \mathbb{R}^n \quad \varrho_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$, $\varrho_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

$\varrho_\infty(x,y) = \max_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i|$ 5) $X \subset \mathbb{R}^n \quad \varrho_p, \varrho_\infty$

6) X - zbieżne ciągi rzeczywiste $X \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_1, a_2, \dots) \in X$ jeśli $\exists \lim_{n \to \infty} a_n \in \mathbb{R}$ czyli $\exists\, a \in \mathbb{R}$ t, że $\forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0\ \forall n > N \quad |a_n - a| < \varepsilon$. $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty} \in X \quad \varrho((a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}) =$

$= \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n|$

7) $\ell^p = \{ (a_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < +\infty \}$ $\quad \varrho_p((a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$

8) $C([a,b]) = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f$ ciągła $\}$ $\quad \varrho(f, g) = \sup_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|$

9) $L^p([a,b]) = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid \int_a^b |f(t)|^p \, dt < +\infty \}$

$$\varrho_p(f, g) = \left(\int_a^b |f(t) - g(t)| \, dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

10) $C([a,b]) \subset L([a,b])$ $\quad f, g \in C([a,b])$ $\quad \varrho(f, g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| \, dt$

Def. (X, ϱ) przestrzeń metryczna $\quad (x_n)_{n=1}^{\infty}$ ciąg t, że $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in X$

Granicą ciągu $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest $x \in X$ $\left(\lim_{n \to \infty} x_n = x \right)$ jeśli $\lim_{n \to \infty} \varrho(x_n, x) = 0$.
Ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ nazywamy wtedy zbieżnym.

Uwaga. $\lim_{n \to \infty} x_n = x \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists N > 0 \; \forall n > N \quad \varrho(x_n, x) < \varepsilon$

Niech $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ będzie ciągiem zbieżnym

Weźmy $\varepsilon > 0 \; \exists N > 0 \; \forall n > N \quad \varrho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$

Stąd jeśli $n, m > N \quad \varrho(x_n, x_m) \leq \varrho(x_n, x) + \varrho(x, x_m) = \varrho(x_n, x) + \varrho(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Czyli pokazaliśmy, że $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N > 0 \; \forall n, m > N \quad \varrho(x_n, x_m) < \varepsilon$

Def. Ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ nazywamy podstawowym (lub ciągiem Cauchy'ego) jeśli $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N > 0 \; \forall n, m > N$
$\varrho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Udowodniliśmy tw.

Tw. Jeśli ciąg jest zbieżny to jest podstawowy.

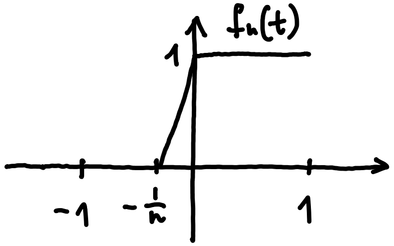
Przykład 1) $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\quad \rho(x,y) = |x-y|$

$x_n = \frac{1}{n}$ dla $n = 1,2,3,\dots$ $\quad (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ wtedy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \in \mathbb{R}$ $\quad 0 \notin X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny w $\mathbb{R}$ stąd jest podstawowy więc $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N > 0 \; \forall n,m > N \; |x_n - x_m| < \varepsilon$

Ale $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ nie jest zbieżny w $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, bo $0 \notin X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2) $C([-1;1])$ z metryką $\rho_1(f,g) = \int_{-1}^{1} |f(t) - g(t)|\, dt$



$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in [-1, -\frac{1}{n}] \\ nt + 1 & \text{dla } t \in [-\frac{1}{n}, 0] \\ 1 & \text{dla } t \in [0, 1] \end{cases} \qquad \text{dla } n = 1,2,3,\dots$$

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in [-1, 0) \\ 1 & t \in [0, 1] \end{cases} \qquad \rho(f_n, g) = \int_{-1}^{1} |f_n(t) - g(t)|\, dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \cdot 1 = \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Funkcja $g(t)$ nie jest ciągła $\quad g \notin C([-1,1])$

Stąd $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ jest podstawowy ale nie jest zbieżny.

Def. Przestrzeń metryczna jest zupełna jeśli każdy ciąg podstawowy jest zbieżny.

(X, ρ) - przestrzeń metryczna

Def. Przekształcenie $F: X \to X$ jest kontrakcją (przekształceniem zwężającym) jeśli

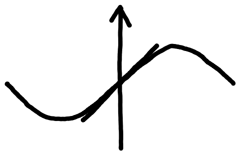
$$\exists \lambda \in (0,1) \quad \forall x,y \in X \quad \rho(F(x), F(y)) \leq \lambda \rho(x,y)$$

Przykład. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$ $|f'(x)| \leq \lambda < 1$. Wtedy f jest kontrakcją.

(Tw. Lagrange'a) $\forall x,y \in \mathbb{R}$ $\quad x < y \quad \exists c \in (x,y) \quad f(y) - f(x) = f'(c)(y-x)$

$$\forall x,y \in \mathbb{R} \; |f(x) - f(y)| = |f'(c)| \, |x-y| \leq \lambda |x-y|$$

$f(x) = \sin x$



$$|\sin x - \sin y| \leq |\cos c| \, |x-y|$$

Punkt $x \in X$ jest punktem stałym przekształcenia $F: X \to X$ jeśli $F(x) = x$.

Tw (Banacha o odwzorowaniu zwężającym)

Jeśli F jest przekształceniem zwężającym przestrzeni metrycznej zupełnej X w siebie to F ma dokładnie jeden punkt stały. $\forall x \in X$ ciąg punktów $x_n = F^n(x) = \underbrace{F(F(\ldots(F}_{n}(x))$ jest zbieżny do punktu stałego F.

Dowód.: $\rho(x, F(x)) = d \qquad \underset{n > m}{\rho(F^n(x), F^m(x))} \leq \rho(F^n(x), F^{n-1}(x)) + \rho(F^{n-1}(x), F^{n-2}(x)) + \ldots + \rho(F^{m+1}(x), F^m(x)) \leq$

$$\leq \lambda^{n-1} d + \lambda^{n-2} d + \ldots + \lambda^m d = (\lambda^m + \ldots + \lambda^{n-1}) d = \lambda^m (1 + \ldots + \lambda^{n-m-1}) d \leq \lambda^m \frac{1}{1-\lambda} d \longrightarrow 0$$

$\lambda^m \xrightarrow{m \to \infty} 0 \quad$ dla $\lambda \in (0,1)$

$(F^n(x))_{n=0}^{\infty}$ jest podstawowy i X - p. metryczna zupełna. Stąd $(F^n(x))_{n=0}^{\infty}$ jest zbieżny

Niech $x^* = \lim_{n\to\infty} F^n(x)$

F jest kontrakcją więc F jest ciągła $F(x^*) = F(\lim_{n\to\infty} F^n(x)) = \lim_{n\to\infty} F^{n+1}(x) = \lim_{n\to\infty} F^n(x) = x^*$

Czyli $F(x^*) = x^*$ Niech $\tilde{x}$ będzie punktem stałym F. Wtedy $F(\tilde{x}) = \tilde{x}$

$\rho(\tilde{x}, x^*) = \rho(F(\tilde{x}), F(x^*)) \leq \lambda \rho(\tilde{x}, x^*)$ $\rho(\tilde{x}, x^*) \leq \lambda \rho(\tilde{x}, x^*)$ i $\lambda \in (0,1)$ $\Rightarrow$ $\rho(\tilde{x}, x^*) = 0$

$\Rightarrow \tilde{x} = x^*$.

Metoda kolejnych przybliżeń Picarda

$\dot{x} = f(t,x)$ $\quad f : (t,x) \mapsto f(t,x) \in \mathbb{R}^m$ $\quad x \in \mathbb{R}^m$

$\varphi : t \mapsto \varphi(t) \in \mathbb{R}^m$ $\quad \big(F(\varphi)\big)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau$

φ jest rozwiązaniem zag. Cauchy'ego $\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \iff \varphi = F(\varphi)$ czyli φ jest punktem stałym F

Przykład 1. $\dot{x} = f(t)$

Wtedy $\big(F(\varphi)\big)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau)\, d\tau$ $\quad \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau)\, d\tau$ to rozwiązanie dokładne.

Przykład 2. $\begin{cases} \dot{x} = x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ $\quad \varphi(t) = x_0$ $\quad F(\varphi) = x_0 + \int_0^t x_0\, d\tau = x_0(1+t)$ $\quad F^2\varphi = x_0 + \int_0^t x_0(1+\tau)\, d\tau = x_0\left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right)$

$F^n\varphi = x_0\left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \ldots + \frac{t^n}{n!}\right)$ $\quad \lim_{n\to\infty} F^n\varphi = e^t x_0$

Normą wektora x w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ nazywamy $|x| = \sqrt{(x|x)}$. Przestrzeń $\mathbb{R}^n$ z metryką $\varrho(x,y) = |x-y|$ jest przestrzenią metryczną zupełną.

$\forall\, x,y \in \mathbb{R}^n$ $\quad |x+y| \le |x| + |y|$ (nierówność trójkąta)

$|(x|y)| \le |x| \cdot |y|$ (nierówność Schwarza

Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ciągła $\quad \int_a^b f(t)\,dt \in \mathbb{R}^n \quad \int_a^b f(t)\,dt = \left(\int_a^b f_1(t)\,dt, \dots, \int_a^b f_n(t)\,dt\right)$

$f = (f_1, \dots, f_n)$

Lemat $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \le \left|\int_a^b |f(t)|\,dt\right|$

Dowód.: $\left|\sum f(t_i)\Delta_i\right| \le \sum |f(t_i)|\,|\Delta_i|$

Norma operatora

$F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ operator (przekształcenie) liniowe $\quad |F| = \sup_{|x|=1} |F(x)| \quad |F+G| \le |F| + |G|$ oraz

$|F \cdot G| \le |F| \cdot |G|$

$L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ jest przestrzenią metryczną zupełną z metryką $\varrho(F,G) = |F-G|$

Warunek Lipschitza $\quad (X, \varrho_X)$, (Y, ϱ_Y) – p. metryczne

$L > 0$ (stała)

Def. Przekształcenie $F : X \to Y$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą L jeśli:

$\forall\, x,y \in X \quad \varrho_Y(F(x), F(y)) \le L\, \varrho_X(x,y)$

F spełnia warunek Lipschitza jeśli $\exists\, L > 0$ t, że F spełnia warunek Lipschitza ze stałą L.

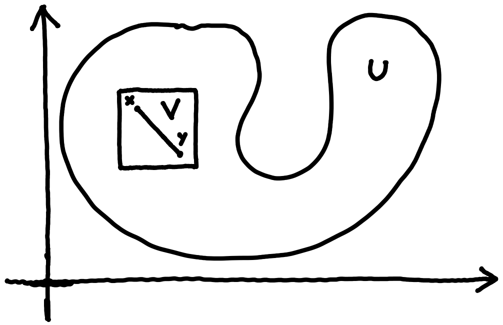
Różniczkowalność i warunek Lipschitza

$f : U \to \mathbb{R}^n$ gładka klasy C^r $(r \geq 1)$ U - obszar w $\mathbb{R}^m$

$$f_*|_x := \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

Tw. $V \subset U$ wypukły i zwarty podzbiór. Wtedy $f|_V$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $L = \sup_{x \in V} |f_*|_x|$

Dowód.: $x, y \in V$ $z(t) = x + t(y-x)$ $t \in [0,1]$



$$f(y) - f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(f(z(s)))\, ds = \int_0^1 f_*|_{z(s)} \dot{z}(s)\, ds$$

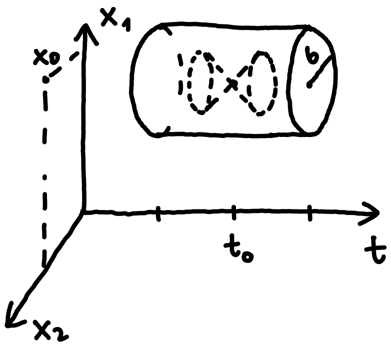
$$|f(y) - f(x)| = \left|\int_0^1 f_*|_{z(s)} \dot{z}(s)\, ds\right| = \int_0^1 |f_*|_{z(s)} \cdot \dot{z}(s)|\, ds \leq$$

$$\leq \int_0^1 |f_*|_{z(s)}|\,|\dot{z}(s)|\, ds = \int_0^1 |f_*|_{z(s)}| \cdot |y-x|\, ds \leq \int_0^1 L \cdot |y-x|\, ds = L|y-x|$$

Uwaga! f klasy C^r $f_*|_V$ jest ciągła i V - zwarty Stąd $L = \sup_{x \in V} |f_*|_x|$ jest skończone

$\dot{x} = f(t,x)$ f klasy C^r $(r \geq 1)$ w obszarze $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

$(t_0, x_0) \in U$ $W = \{(t,x) \mid |t - t_0| \leq a,\ |x - x_0| \leq b\}$ - walec w $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$



$v = f(t,x) \in \mathbb{R}^n$ $v_* \in T_x \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$

$C = \sup_{(t,x) \in W} |f(t,x)|$ $L = \sup_{(t,x) \in W} |f_*|_{(t,x)}|$

$K_0 = \{(x,t) : |t - t_0| \leq a' \ |x - x_0| \leq C|t - t_0|\} \subset W$

$T_{x-x_0} : (t,y) \mapsto (t, y + (x - x_0))$

$K_x = T_{x-x_0}(K_0)$ $|x - x_0| \leq b'$

a', b' takie, że $K_x \subseteq W$

Szukamy rozwiązania postaci $\varphi(t) = x + h(t,x)$ $\varphi(t_0-a', t_0+a') \subset K_x$

$M = \{ h : \{(t,x) \mid |t-t_0| \leq a', |x-x_0| \leq b'\} \to \mathbb{R}^n \mid h$ ciągłe $\forall (t,x)$ $|h(x,t)| \leq C|t-t_0| \}$

$$\rho(h_1, h_2) = \|h_1 - h_2\| = \max_{\substack{|t-t_0| \leq a' \\ |x-x_0| \leq b'}} |h_1(x,t) - h_2(x,t)|$$

Tw. (M, ρ) jest przestrzenią metryczną zupełną.

Dowód.: Granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą

Jeśli funkcje występujące w ciągu podstawowym spełniają nierówność $|h_n(x,t)| \leq C|t-t_0|$ to $|\lim_{n\to\infty} h_n(x,t)| \leq C|t-t_0|$

$F : M \to M$ $\quad (F(h))(t,x) = \int_{t_0}^{t} f(s, x+h(s,x))\,ds \qquad (s, x+h(x,s)) \in K_x$

Tw. Dla dostatecznie małych a' F jest przekształceniem zwężającym

Dowód.: 1) F jest przekształceniem M w M $\quad F(h)$ jest ciągłe, bo to całka z funkcji ciągłej zależnej w sposób ciągły od parametru

$$|(F(h))(t,x)| \leq \left| \int_{t_0}^{t} f(\dots)\,ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^{t} C\,ds \right| \leq C|t-t_0|.$$ Stąd $F(M) \subset M$.

2) F jest zwężające

$$(F(h_1) - F(h_2))(t,x) = \int_{t_0}^{t} (f_1 - f_2)\,ds \qquad f_i(s) = f(s, x + h_i(s,x))$$

$|f_1(s) - f_2(s)| \leq L|h_1(s,x) - h_2(s,x)| \leq L\|h_1 - h_2\|$ $\qquad |F(h_1) - F(h_2)(t,x)| \leq \left| \int_{t_0}^{t} L \|h_1 - h_2\|\,ds \right| \leq$

$\leq L a' \|h_1 - h_2\|$ jeśli $La' < 1$ to F kontrakcja

Wniosek. (Tw. o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania)

(*) $\dot{x} = f(t,x)$ Niech f będzie klasy C^1 w otoczeniu (t_0, x_0)

Wtedy istnieje otoczenie t_0 w którym jest określone rozwiązanie (*) z war. początkowym $\varphi(t_0) = x$, gdzie x dowolny punkt dostatecznie blisko x_0. Rozwiązanie zależy w sposób ciągły od x.

Dowód.: Przekształcenie $F: M \longrightarrow M$, $(F(h))(t,x) = \int_{t_0}^{t} f(s, x + h(s,x))\,ds$ jest zwężające

Stąd posiada punkt stały $h \in M$.

Niech $g(t,x) = x + h(t,x)$ wtedy $g(t,x) = x + \int_{t_0}^{t} f(s, g(s,x))\,ds$. Stąd $\frac{\partial g(t,x)}{\partial t} = f(t, g(t,x))$

Czyli $t \mapsto g(t,x)$ spełnia równanie różniczkowe $\dot{x} = f(t,x)$ oraz $g(x,t_0) = x$

Funkcja $(t,x) \mapsto g(t,x)$ jest też ciągła bo $h \in M$.

φ_1, φ_2 dwa rozwiązania równania $\dot{x} = f(t,x)$ z warunkiem $\dot{x}(t_0) = \varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$ określone dla $|t-t_0| < \alpha$.

Niech $0 < \alpha' < \alpha$. Niech $\|\varphi\| \stackrel{def}{=} \max\limits_{|t-t_0|<\alpha'} |\varphi(t)|$. Wtedy $\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))\,ds$

Dla dostatecznie małych α' $\|\varphi_1 - \varphi_2\| \leq L\alpha' \|\varphi_1 - \varphi_2\|$ jeśli $L\alpha' < 1$ to $\|\varphi_1 - \varphi_2\| = 0 \Rightarrow$

$\varphi_1 = \varphi_2$ w pewnym otoczeniu t_0.

Stąd wynika jednoznaczność rozwiązania.

Tw. (Picarda - Lindelöfa). Niech $Q = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |t-t_0| \le a,\ |x-x_0| \le b\}$.

Niech $f : Q \to \mathbb{R}^n$ będzie ciągła oraz $\sup_{(t,x)\in Q} |f(t,x)| = M$.

Jeśli f spełnia warunek Lipschitza względem zmiennej x w zbiorze Q tzn.

$\exists L \ \forall (t,x_1),(t,x_2) \in Q \quad |f(t,x_1) - f(t,x_2)| \le L|x_1 - x_2|$ to zagadnienie Cauchy'ego

$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ ma jednoznaczne rozwiązanie w przedziale $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$ gdzie $\alpha < \min(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L})$

Dowód.: (praca domowa)

Tw. (Peano) Niech $Q = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t \in [t_0, t_0+a],\ |x-x_0| \le b\}$

Jeśli $f : Q \to \mathbb{R}^n$ jest ciągła to zagadnienie Cauchy'ego $\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

ma rozwiązanie w przedziale $[t_0, t_0+\alpha]$, gdzie $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$, $M = \sup_{(t,x)\in Q} |f(t,x)|$.

Przykład. $\dot{x} = x^{\frac{1}{3}}$. Równanie spełnia zał. tw Peano, ale nie spełnia zał. tw P-L

Nie są spełnione zał. tw. P-L na prostej $x = 0$

Niech $\varphi_1(t) \equiv 0$, $\varphi_2(t) \equiv \left(\frac{2}{3}(t-t_0)\right)^{\frac{3}{2}}$, $\varphi_3(t) = -\left(\frac{2}{3}(t-t_0)\right)^{\frac{3}{2}}$

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ są rozwiązaniami zag. Cauchy'ego $\begin{cases} \dot{x} = x^{\frac{1}{3}} \\ x(0) = 0 \end{cases}$.

(Patrz plik. Zagadnienie_poczatkowe_cuberoot.nb)

Przedłużalność rozwiązań

$\dot{x} = f(t,x)$ Niech $\varphi(t)$ będzie rozwiązaniem tego równania w przedziale $[t_0, t_0+\alpha]$

Niech $t_1 = t_0 + \alpha$

$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ \dot{x}(t_1) = \varphi(t_1) \end{cases}$ Czy możemy znaleźć rozwiązanie tego zagadnienia początkowego w przedziale $[t_1, t_1+\alpha_1]$? lub w przedziale $[t_0-\alpha, t_0]$ z war. początkowym $x(t_0) = \varphi(t_0)$?

Def. Rozwiązanie $\varphi(t)$ określone na przedziale $J \subset \mathbb{R}$ nazywamy rozwiązaniem wysyconym jeśli nie istnieje przedłużenie tego rozwiązania na przedział J_1 taki, że $J \subsetneq J_1$. Przedział J nazywamy wtedy maksymalnym przedziałem istnienia rozwiązania $\varphi(t)$.

Jak zachowuje się rozwiązanie wysycone $\varphi(t)$, kiedy t dociera do brzegu maksymalnego przedziału istnienia rozwiązania?

(*) Tw. Niech $f(t,x)$ będzie funkcją ciągłą i ograniczoną na zbiorze otwartym $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$

Niech $\varphi(t)$ będzie rozwiązaniem równania $\dot{x} = f(t,x)$ w przedziale (a, b)

Istnieją wtedy granice $\lim_{t\to a^+} \varphi(t)$ (prawostronna w a) oraz $\lim_{t \to b^-} \varphi(t)$ (lewostronna w b)

Jeśli funkcja $f(t,x)$ jest ciągła w punkcie $(a, \lim_{t\to a^+}\varphi(t))$ (w punkcie $(b, \lim_{t\to b^-}\varphi(t))$) to rozwiązanie można przedłużyć na przedział $[a, b)$ (odpowiednio $(a, b]$)

Dowód.: Funkcja spełnia równanie $\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds$ dla $a < t_0 \leq t_0 < b$ $(*)$

$f(t,x)$ jest ograniczona na E więc zachodzi

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \leq \left| \int_{t_1}^{t_2} f(s, \varphi(s))\, ds \right| \leq M(t_2 - t_1), \text{ gdzie } M = \sup_{(t,x) \in E} |f(t,x)|$$

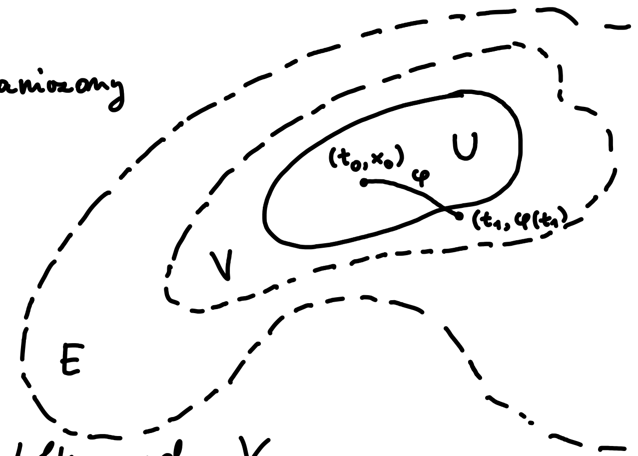
Stąd na podstawie zupełności przestrzeni $\mathbb{R}^m$ wynika istnienie granic jednostronnych $\lim_{t \to a+} \varphi(t)$ oraz $\lim_{t \to b^-} \varphi(t)$

Jeśli funkcja $f(t,x)$ jest ciągła w $(b, \lim_{t \to b^-} \varphi(t))$ to otrzymujemy ze wzoru $(*)$

$$\varphi(b) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{b} f(s, \varphi(s))\, ds.$$

Analogicznie dla przedziału $[a, b)$. $\blacksquare$

Tw. Niech $f(t,x)$ będzie funkcją ciągłą na zbiorze otwartym $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$.
Niech $\varphi(t)$ będzie rozwiązaniem równania $\dot{x} = f(t,x)$ w przedziale $[t_0, t_0+\alpha]$
Wtedy funkcję $\varphi(t)$ może być przedłużona do rozwiązania wysycanego z maksymalnym przedziałem istnienia rozwiązania (a,b).
Jeżeli ciąg punktów $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ zbiega do jednego z krańców przedziału (a,b) to ciąg $(t_n, \varphi(t_n))_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do brzegu E
Jeżeli E jest nieograniczony to zbieżność do brzegu może oznaczać nieograniczoność ciągu $(t_n, \varphi(t_n))$ dla $t_n \to a$ lub $t_n \to b$.



Dowód.: Niech $U \subseteq E$ zwarty (domknięty i ograniczony). Niech V otwarty i ograniczony

$U \subset V$, $\bar{V} \subset E$

Rozważmy zagadnienie Cauchy'ego $\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

$M = \sup_{(t,x)\in V} |f(t,x)|$ Niech $a = b = \operatorname{dist}(\bar{V}, \partial E)$

Z tw. Peano dla powyższych a, b, M istnieje rozwiązanie zag. Cauchy'ego $\varphi(t)$ w przedziale $[t_0, t_0+\alpha]$ dla $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$. Czyli α zależy tylko od V.

Jeżeli $(t_0+\alpha, \varphi(t_0+a)) \in M$ to powtarzamy rozumowanie dla zagadnienia Cauchy'ego

$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0+\alpha) = \varphi(t_0+\alpha) \end{cases}$ itd.

U jest zwarty. Po skończonej liczbie powtórzeń otrzymamy $\varphi(t)$ rozwiązanie $\dot{x} = f(t,x)$ na przedziale $[t_0, t_1]$ t. że $(t_1, \varphi(t_1)) \notin E$.

Budujemy pokrycie zbioru E ciągiem zbiorów otwartych i ograniczonych $(E_n)_{n=1}^{\infty}$, $\overline{E_n} \subset E_{n+1}$ dla $n=1,2,3\ldots$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$ (w każdym kroku $\overline{E_n} = U$, $V = E_{n+1}$)

Stąd otrzymujemy ciągi $(t_i)_{i=1}^{\infty}$ $(n_i)_{i=1}^{\infty}$ $(t_i, \varphi(t_i)) \in E_{n_i}$ $(t_i, \varphi(t_i)) \notin E_{n_{i-1}}$. Ciąg $(t_i)_{i=1}^{\infty}$ jest monotoniczny

$t_i < t_{i+1}$ dla $i=1,2,\ldots$ Stąd ma granicę (skończoną lub nieskończoną)

Jeśli $\lim_{i\to\infty} t_i = +\infty$ to koniec dowodu. Jeśli $(t_i)_{i=1}^{\infty}$ jest ograniczony z góry to $\lim_{i\to\infty} t_i = b$

Jeśli $(t_i, \varphi(t_i))_{i=1}^{\infty}$ jest nieograniczony to koniec dowodu.

Jeśli ciąg $(t_i, \varphi(t_i))_{i=1}^{\infty}$ jest ograniczony to na podstawie poprzedniego Tw $(*)$ funkcja $\varphi(t)$ ma granicę $\lim_{t\to b^-} \varphi(t)$. Punkt $(b, \lim_{t\to b^-} \varphi(t))$ jest punktem brzegowym zbioru E, bo gdyby był to punkt wewnętrzny E to $(b, \lim_{t\to b^-} \varphi(t)) \in E_k$ dla pewnego k, $\overline{E_k} \subset E$. Moglibyśmy więc przedłużyć rozwiązanie $\varphi(t)$ na przedział większy niż $[t_0, b)$ co przeczy maksymalności b.

Analogiczne rozumowanie stosujemy dla a (przedziały $t_0-\alpha, t_0]$) ■