Układ m-równań liniowych pierwszego rzędu

$$\dot{x} = A(t)x + f(t) \qquad x : I \to \mathbb{R}^m \qquad A : I \to M_{m\times m}(\mathbb{R}) \qquad f : I \to \mathbb{R}^m$$

$$x(t_0) = x_0 \qquad t_0 \in I \qquad x_0 \in \mathbb{R}^m$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{pmatrix} \qquad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t), \dots, a_{1m}(t) \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}(t) \dots a_{mm}(t) \end{pmatrix}$$

RJ (równanie liniowe jednorodne) $f(t) \equiv 0$ czyli $\dot{x} = A(t)x$

Funkcja $x(t) \equiv 0$ jest rozwiązaniem RJ z warunkiem początkowym $x(t_0) = 0$

Tw. 1) Rozwiązania RJ tworzą m-wymiarową przestrzeń liniową E

2) Jeżeli $x_c(t)$ jest rozwiązaniem szczególnym RN $\dot{x} = A(t)x + f(t)$ i wektory $x_1(t), \dots, x_m(t)$ są bazą rozwiązań RJ (bazą p. lin. E) to rozwiązanie ogólne RN ma postać: $x(t) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i(t) + x_c(t)$, gdzie $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$

RORN = RORJ + RSRN

Dowód.: 1) $y_1(t)$, $y_2(t)$ RSRJ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ $\dot{y}(t) = c_1 \dot{y}_1(t) + c_2 \dot{y}_2(t) =$

$= c_1 A(t) y_1(t) + c_2 A(t) y_2(t) = A(t)(c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)) = A(t) y(t)$ E jest przestrzenią liniową.

$L : E \ni x(t) \mapsto x(t_0) \in \mathbb{R}^m$ $L(c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)) = c_1 L(x_1(t)) + c_2 L(x_2(t))$

L jest liniowe. Pokażemy, że L jest izomorfizmem.

$\forall\, x_0 \in \mathbb{R}^m$ $\exists$ RRJ $\dot{x} = A(t)x$ z war. C $x(t_0) = x_0$. Stąd L jest "na".

Jeśli $x(t_0) = 0$ to $x(t) \equiv 0$. Stąd $\ker L = \{x(t) \equiv 0\}$ czyli L jest różnowartościowe.

2) Jeśli $x_c(t)$ i $x_d(t)$ są RSRN to $x_d(t) - x_c(t)$ jest RRJ. ■

Niech $x_1(t), \dots, x_m(t)$ będzie bazą E. Niech $X(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t)) \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$. Wtedy $\dot{X} = A(t) X$

Tw. Niech $X(t)$ będzie macierzą spełniającą równanie $\dot{X} = A(t) X$ w przedziale (a, b).

Niech $\Delta(t) = \det X(t)$. Wtedy $\forall\, t, t_0 \in (a, b)$ $\Delta(t) = \Delta(t_0) \exp \int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)\, ds$, gdzie $\operatorname{tr} A(t) = \sum_{i=1}^{m} a_{ii}(t)$ (ślad $A(t)$)

Dowód.: $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^{m}$

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^m \\ x_2^1 & x_2^2 & \cdots & x_2^m \\ \vdots & \vdots & & \\ x_m^1 & x_m^2 & \cdots & x_m^m \end{pmatrix} \qquad x_i(t) = \begin{pmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ \vdots \\ x_m^i \end{pmatrix} \qquad \dot{\Delta}(t) = (\det X(t))^{\cdot} = \det \begin{pmatrix} \dot{x}_1^1 & \dot{x}_1^2 & \cdots & \dot{x}_1^m \\ x_2^1 & x_2^2 & \cdots & x_2^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_m^1 & x_m^2 & \cdots & x_m^m \end{pmatrix} + \dots + \det \begin{pmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^m \\ x_2^1 & x_2^2 & \cdots & x_2^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dot{x}_m^1 & \dot{x}_m^2 & & \dot{x}_m^m \end{pmatrix}$$

$$\dot{x}_i^j = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} x_k^j \qquad \dot{\Delta}(t) = \det \begin{pmatrix} a_{11} x_1^1 & a_{11} x_1^2 & \cdots & a_{11} x_1^m \\ x_2^1 & x_2^2 & \cdots & x_2^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_m^1 & x_m^2 & \cdots & x_m^m \end{pmatrix} + \dots + \det \begin{pmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^m \\ x_2^1 & x_2^2 & \cdots & x_2^m \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{mm} x_m^1 & a_{mm} x_m^2 & \cdots & a_{mm} x_m^m \end{pmatrix} = \Delta(t) \sum_{i=1}^{m} a_{ii}(t)$$

$$\dot{\Delta}(t) = \operatorname{tr} A(t) \cdot \Delta(t) \qquad \frac{\dot{\Delta}(t)}{\Delta(t)} = \operatorname{tr} A(t) \qquad \Delta(t) = \Delta(t_0) \exp \int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)\, ds \quad ■$$

Wniosek. $\exists t_0 \in (a,b) \Rightarrow \forall t \in (a,b)\ \Delta(t) \neq 0$.

Definicja.: Macierz kwadratowa $X(t)$ o wymiarze $m\times m$ spełniająca równanie $(*)\ \dot{X} = A(t)X$, dla której $\Delta(t)\neq 0$, nazywa się macierzą fundamentalną układu $(*)$. Kolumny $x_1(t),\dots,x_m(t)$ macierzy $X(t)$ nazywamy fundamentalnym układem rozwiązań układu $(*)$. Wyznacznik $\Delta(t)$ nazywa się wyznacznikiem Wrońskiego (wrońskianem) układu $x_1(t),\dots,x_m(t)$.

Tw. Każde równanie liniowe $\dot{x} = A(t)x$ ma układ fundamentalny.

Dowód.: Wybieramy m liniowo niezależnych wektorów w $\mathbb{R}^m$: $x_0^1, x_0^2,\dots,x_0^m$ i rozwiązujemy równanie $\dot{x} = A(t)x \quad x(t_0) = x_0^i \quad i=1,\dots,m$ gdzie $t_0\in(a,b)$. Rozwiązania $x^i(t)$ dla $i=1,\dots,m$ tworzą układ fundamentalny, bo $\Delta(t_0)\neq 0$ (z lin. niezal. x_0^i dla $i=1,\dots,m$). Z wniosku $\Delta(t)\neq 0\ \forall t\in(a,b)$. ■

Uwaga. $X_\alpha(t), X_\beta(t)$ - macierze fundamentalne układu $\dot{x}=A(t)x$. Wtedy $X_\alpha(t_0), X_\beta(t_0)$ macierze nieosobliwe $m\times m$. Stąd $C X_\alpha(t_0) = X_\beta(t_0) \Rightarrow C X_\alpha(t) = X_\beta(t)$.

Tw. Rozwiązaniem zagadnienia początkowego $\begin{cases}\dot{x} = A(t)x + f(t)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$ jest $x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x_0 + X(t)\int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)f(s)\,ds$,

gdzie $X(t)$ jest macierzą fundamentalną układu $\dot{x}=A(t)x$.

Dowód.: $x_1(t),\dots,x_m(t)$ - układ fundamentalny $\dot{x}=A(t)x$. RORJ $x(t)=\sum_{i=1}^m c_i x_i(t)$

Niech $x(t) = \sum_{i=1}^m c_i(t)x_i(t)$. $X(t) = (x_1(t),\dots,x_m(t))$.

$C(t) = \begin{pmatrix} c_1(t)\\ \vdots \\ c_m(t)\end{pmatrix}$. Wtedy $x(t) = X(t)C(t)$.

$\dot{X}(t)C(t) + X(t)\dot{C}(t) = A X(t) C(t) + f(t) \qquad \dot{X} = A(t)X$

$X(t)\dot{C}(t) = f(t) \qquad \dot{C}(t) = X^{-1}(t)f(t) \Rightarrow C(t) = C(t_0) + \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)f(s)\,ds \quad X(t_0)C(t_0) = x_0 \quad C(t_0) = X^{-1}(t_0)x_0$

Stąd $\quad C(t) = X^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s) f(s)\,ds \quad$ i $\quad x(t) = X(t)\, C(t)$. ■

Układy o stałych współczynnikach $\begin{cases} \dot{x} = Rx \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ $(**)$ $\quad R \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$

Def. $A \in M_{m\times m}(\mathbb{R}) \quad e^{At} = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \ldots + \frac{1}{n!}A^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$

Tw. Macierzą fundamentalną układu $(**)$ jest e^{Rt}.

Dowód.: $\frac{d}{dt} e^{Rt} = \frac{d}{dt}\left(I + Rt + \frac{1}{2!}R^2t^2 + \frac{1}{3!}R^3t^3 + \ldots + \frac{1}{n!}R^nt^n + \ldots\right) =$

$= R + R^2t + \frac{1}{2!}R^3t^2 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}R^n t^{n-1} + \ldots\ ) = R\left(I + Rt + \frac{1}{2!}R^2t^2 + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}R^{n-1}t^{n-1} + \ldots\right) = Re^{Rt}$

Stąd $X(t) = e^{Rt}$ spełnia $\dot{X} = RX$ ■

Uwaga. Jeżeli $A, B \in M_{m\times m}(\mathbb{R}) \quad A\cdot B = B \cdot A \implies e^{A+B} = e^A \cdot e^B$

Dowód.: $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} \qquad (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ■

Stw.

$$R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_m \end{pmatrix} \implies e^{tR} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_m t} \end{pmatrix}$$

Dowód.: $\quad R^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & 0 \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_m^k \end{pmatrix}$

$A \in M_{m\times m}(\mathbb{C})$

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & J_2 & \\ 0 & & J_k \end{pmatrix} \qquad J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & 0 \\ 1 & \lambda_i & & \\ & 1 & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & & & 0 \\ & e^{tJ_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{tJ_k} \end{pmatrix} \qquad J_i = \lambda_i I_k + K_k \qquad \lambda_i I_k \cdot K_k = K_k \cdot (\lambda_i I_k)$$

$$e^{tJ_i} = e^{\lambda_i t} \cdot I_k \, e^{K_i t}$$

$$K_k = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad K_k^2 = \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ 1 & 0 & \ddots & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad e^{tK_k} = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ t & 1 & & & \\ \frac{t^2}{2} & t & 1 & & \\ \vdots & \frac{t^2}{2} & t & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} & \cdots & \frac{t^2}{2} & t & 1 \end{pmatrix}$$

Tw. $R = QJQ^{-1} \Rightarrow R^n = QJ^nQ^{-1} \Rightarrow \exp(tR) = Q\exp(tJ)\,Q^{-1}$.

Def. $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \lambda$ to wartość własna R jeśli $\exists\, v \in \mathbb{R}^m \quad Q \cdot v = \lambda v$

Wektor $v \in \mathbb{R}^m$ nazywamy wektorem własnym R.

Stw. Jeżeli λ to własność własna to $p(\lambda) = 0$, gdzie $p(x) = \det(Q - xI)$

$p(x)$ nazywamy wielomianem charakterystycznym R.

Dowód.: $Rv = \lambda \cdot v \Rightarrow (R - \lambda I)v = 0 \quad v \in \ker(R - \lambda \cdot I) \quad R - \lambda I : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \Rightarrow \det(R - \lambda I) = 0$ ∎

$\lambda_1, \dots, \lambda_m$ - różne wartości własne R

$v_1, \dots, v_m$ wektory własne R

$R v_i = \lambda v_i$ dla $i = 1, \dots, m$ $\quad R(e^{t\lambda_i} v_i) = e^{t\lambda_i} R v_i = e^{t\lambda_i} \lambda_i v_i = \lambda_i (e^{t\lambda_i} v_i)$ $\quad \frac{d}{dt}(e^{t\lambda_i} v_i) = \lambda_i e^{\lambda_i t} v_i$

$\frac{d}{dt}(e^{\lambda_i t} v_i) = R(e^{t\lambda_i} v_i)$ $\quad \det(e^{\lambda_1 t} v_1, \dots, e^{\lambda_m t} v_m) = e^{\lambda_1 t} \cdot \ldots \cdot e^{\lambda_m t} \det(v_1, \dots, v_m) \neq 0$

$X(t) = (e^{\lambda_1 t} v_1, \dots, e^{\lambda_m t} v_m)$ - macierz fundamentalna

$$(*) \begin{cases} \frac{d}{dt} Y(t) = R \cdot Y(t) \\ Y(0) = I_m \end{cases}$$

$Y(t) = \exp(tR)$ spełnia $(*)$ $\quad$ Niech $Z(t) = X(t) \cdot X^{-1}(0)$

$$\frac{d}{dt} Z(t) = \frac{d}{dt}(X(t) \cdot X^{-1}(0)) = \left(\frac{d}{dt} X(t)\right) \cdot X^{-1}(0) = R \cdot X(t) \cdot X^{-1}(0) = R(X(t) \cdot X^{-1}(0)) = R Z(t)$$

$Z(0) = (X(t) \cdot X^{-1}(0))\big|_{t=0} = X(0) \cdot X^{-1}(0) = I_m$ czyli $Z(t)$ spełnia $(*)$

Stąd $\exp(tR) = X(t) \cdot X^{-1}(0)$.