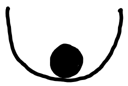
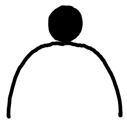
Wojciech Domitrz RRZ - Stabilność rozwiązań Wykład 6.

Przykład. 1)



stabilne położenie równowagi



niestabilne położenie równowagi

(*) $\dot{x} = f(x)$ Niech $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$ taki, że $f(\bar{x}) = 0$.

Wtedy $x(t) \equiv \bar{x}$ jest rozwiązaniem (*) – położeniem równowagi.

Niech $x_0 \in \mathbb{R}^m$ t., że $|x_0 - \bar{x}| < \varepsilon$ i $x(t)$ rozw. z war. $x(t_0) = x_0$

Jak zachowuje się $x(t)$ wzgl. położenia równowagi $\bar{x}$

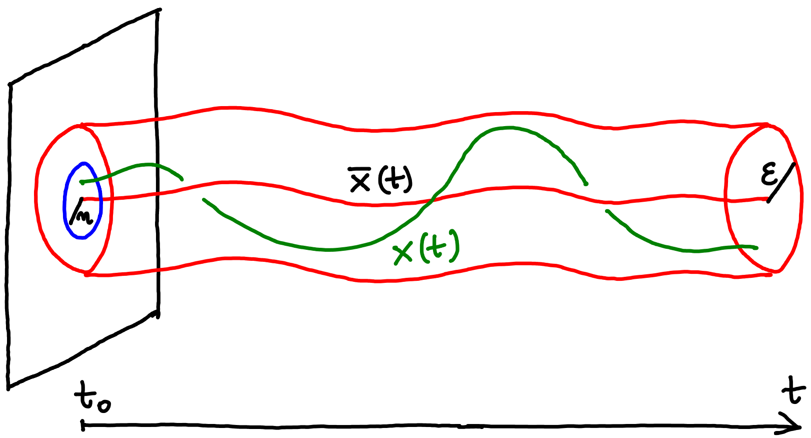
czyli $|x(t) - \bar{x}|$?

$\dot{x} = f(t,x)$ $f : \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^m$ klasy C^1

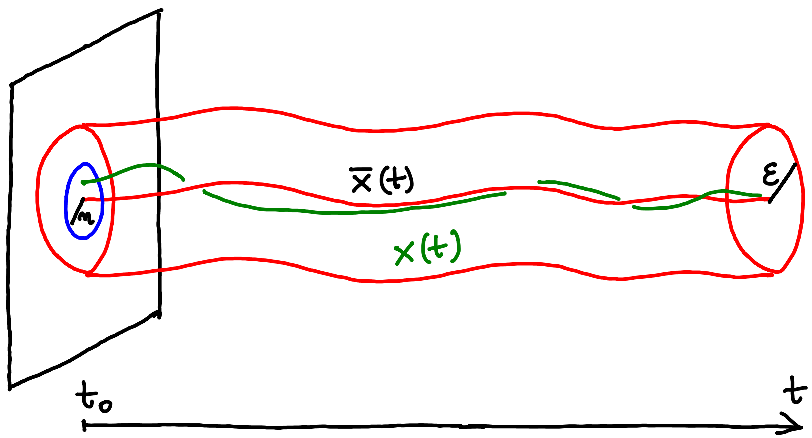
Def. Rozwiązanie $\bar{x} : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^m$ jest stabilne w sensie Lapunowa dla $t \to +\infty$,

jeżeli $\forall \varepsilon > 0 \ \exists t_0 \geq 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall x(t)$ rozwiązania $|x(t_0) - \bar{x}(t_0)| < \eta \Rightarrow \forall t > t_0 \ |x(t) - \bar{x}(t)| < \varepsilon$

Jeśli dodatkowo $\lim\limits_{t \to \infty} |x(t) - \bar{x}(t)| = 0$ to $\bar{x}(t)$ jest asymptotycznie stabilne.



stabilność



asymptotyczna stabilność

Przykład 2) $\dot{x} = Ax$ $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ $\bar{x}(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ rozwiązanie. $\bar{x}(t)$ jest położeniem równowagi.

RORJ $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ $x_1(t) = c_{11} e^{\alpha t} \cos \beta t + c_{12} e^{\alpha t} \sin \beta t$ $x_2(t) = c_{21} e^{\alpha t} \cos \beta t + c_{22} e^{\alpha t} \sin \beta t$

$\alpha < 0$ to $|x_1(t)|$ i $|x_2(t)|$ dowolnie bliskie 0 dla dużych t bo $\lim_{t \to \infty} e^{\alpha t} \cos \beta t = \lim_{t \to \infty} e^{\alpha t} \sin \beta t = 0$

$\alpha < 0$ to $\bar{x}(t)$ jest asymptotycznie stabilnym położeniem równowagi

$\alpha > 0$ to $|x_1(t)|$ i $|x_2(t)|$ oscylują między 0 i $e^{\alpha t}$. Wtedy $\bar{x}(t)$ nie jest stabilnym położeniem równowagi.

Jak zbadać stabilność rozwiązania bez znajdowania wszystkich rozwiązań?

Przypadek równania autonomicznego.

(*) $\dot{x} = f(x)$ $f : Q \to \mathbb{R}^m$ $0 \in Q \subset \mathbb{R}^m$ otwarty f klasy C^1 $f(0) = 0$.

Def. Funkcją Lapunowa dla równania (*) nazywamy funkcję $V : Q \to \mathbb{R}$ klasy C^1 t., że

1) $\forall x \in Q$ $V(x) \geq 0$ 2) $V(x) = 0 \iff x = 0$

3) $\forall x(t)$ rozwiązanie (*) $t \mapsto V(x(t))$ jest nierosnąca

Uwaga! Warunek 3) można zastąpić

3') $\operatorname{grad} V \cdot f \leq 0$

Warunek 3') nie wymaga znajomości $x(t)$

Tw. zał. $Q \subset \mathbb{R}^m$ otwarty, $0 \in Q$, $f : Q \to \mathbb{R}^m$ klasy C^1, $f(0) = 0$

Teza. Jeśli dla równania $(*)$ istnieje funkcja Lapunowa to rozwiązanie $\bar{x}(t) \equiv 0$ jest stabilne.

Jeśli dodatkowo $(\ast\ast)$ $\forall\, x \in Q \setminus \{0\}$ $\operatorname{grad} V(x) \bullet f(x) < 0$ to $\bar{x}(t) \equiv 0$ jest asymptotycznie stabilne.

Dowód.: $B(\varepsilon) = \{ x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| < \varepsilon \}$ $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ $S(\varepsilon) = \{ x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| = \varepsilon \}$

ε_0 taki, że $B(\varepsilon_0) \subset Q$. Niech $\varepsilon < \varepsilon_0$ $\delta := \min_{x \in S(\varepsilon)} V(x)$ $\delta > 0$ $U = \{ x \in B(\varepsilon) \mid V(x) < \delta \}$

Niech $x_0 \in U$ i $x(t)$ rozw. $(*)$ t. że $x(0) = x_0$. Niech $t > 0$ $V(x(t)) \leq V(x_0) < \delta$, bo $x_0 \in U$.

Stąd $\forall\, t > 0$ $V(x(t)) < \delta$ czyli $x(t) \in B(\varepsilon) \setminus S(\varepsilon)$. Stąd $\forall\, t > 0$ $|x(t) - \bar{x}(t)| = |x(t)| < \varepsilon$

czyli $\bar{x}(t) \equiv 0$ jest stabilne.

Dowód asymptotycznej stabilności: Pokażemy, że $\forall\, x(t)$ rozw. $(*)$ $\lim_{t \to \infty} V(x(t)) = 0$

zał, że tak nie jest tzn. $\exists\, y(t)$ rozw. $(*)$ t, że $V(y(t)) \underset{t \to \infty}{\not\to} 0$. $t \mapsto V(y(t))$ jest nierosnąca $\Rightarrow \exists\, \alpha > 0$ $\forall\, t > t_0$ $V(y(t)) > \alpha$

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon_1 > 0$ $\forall\, t > t_0$ $\|y(t)\| \geq \varepsilon_1 > 0$ czyli $\forall\, t > t_0$ $y(t) \in \overline{B}(\varepsilon) - B(\varepsilon_1)$ – zbiór zwarty.

Funkcja $y \mapsto \operatorname{grad} V(y) \bullet f(y)$ jest ciągła na tym zbiorze oraz $(\ast\ast)$ $\operatorname{grad} V \cdot f \leq 0$.

Stąd $\exists\, m > 0$ $\forall\, y \in \overline{B(\varepsilon)} - B(\varepsilon_0)$ $\operatorname{grad} V(y) \bullet f(y) \leq -m < 0$

Stąd $\forall\, t > t_0$ $\frac{d}{dt}(V(y(t)) = \operatorname{grad} V(y(t)) \cdot f(y(t)) \leq -m$. Stąd $V(y(t)) - V(y(t_0)) \leq -m(t - t_0)$

czyli $V(y(t)) \leq V(y(t_0)) - m(t - t_0) \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} -\infty$. Sprzeczne z tym, że $V(y(t)) \geq 0$

Przykład 3) (*) $\dot{x} = Ax$ $\quad A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ (patz Przykład 2). Znajdźmy funkcję Lapunowa.

Niech $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ $\quad$ 1) $V(x) = x_1^2 + x_2^2 \geq 1$ $\quad$ 2) $V(x) = x_1^2 + x_2^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0$

3) Niech $x(t)$ będzie rozwiązaniem równania $\dot{x} = Ax$ $\quad \frac{d}{dt} V(x(t)) = 2x_1(t)\dot{x}_1(t) + 2x_2(t)\dot{x}_2(t) =$

$= 2x_1(\alpha x_1 + \beta x_2) + 2x_2(-\beta x_1 + \alpha x_2) = 2\alpha(x_1^2 + x_2^2)$

Jeśli $\alpha < 0$ to $\frac{d}{dt} V(x(t)) \leq 0$ czyli $V(x(t))$ jest nierosnącą funkcją zmiennej t.

Stąd otrzymujemy, że $x(t) \equiv 0$ jest stabilnym rozwiązaniem równania (*)

Jeśli $x \neq 0$ to $\frac{dV}{dt}(x) < 0 \Rightarrow x(t) \equiv 0$ jest asymptotycznie stabilne.

Przykład 3) Zbadajmy stabilność położenia równowagi dla wahadła z tarciem

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -k^2 \sin x_1 - b x_2 \end{cases}$$

$(0,0)$ jest położeniem równowagi. Funkcja Lapunowa ma postać $V(x_1,x_2) = k^2(1-\cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$

$V(x_1,x_2) \geq 0$ $\quad V(x_1,x_2) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x_2^2 \geq 0$, $\quad V(x_1,x_2) = 0$ $\quad \frac{1}{2}x_2^2 = 0$ $\quad$ i $\quad 1 - \cos x_1 = 0$ $\quad x_1 = 0$

$\frac{d}{dt} V(x_1,x_2) = k^2 x_2 \sin x_1 + x_2(-k^2 \sin x_1 - b x_2^2) = -b x_2^2 \leq 0$

Stąd $(0,0)$ jest punktem równowagi stabilnej.