Wojciech Domitrz Równania różniczkowe zwyczajne

$\dot{x} = f(x)$ $\quad f: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ taka, że $\forall\, p \in \mathbb{R}^m$ istnieje rozwiązanie równania z warunkiem pocz. $x(0) = p$ $x(t,p)$ określone dla $t \in \mathbb{R}$

Def. Zbiorem granicznym w $+\infty$ punktu p (orbity punktu p) nazywamy zbiór

$$\omega(p) := \{ y \in \mathbb{R}^m \mid y = \lim_{n\to\infty} x(t_n, p) \text{ dla pewnego ciągu } (t_n)_{n=1}^{\infty},\ \lim_{n\to\infty} t_n = +\infty \}$$

Zbiorem granicznym w $-\infty$ punktu p (orbity punktu p) nazywamy zbiór

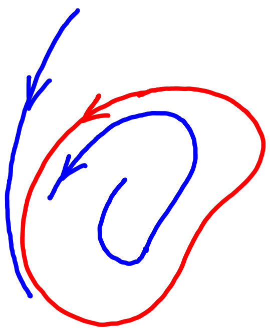
$$\alpha(p) := \{ y \in \mathbb{R}^m \mid y = \lim_{n\to\infty} x(t_n, p) \text{ dla pewnego ciągu } (t_n)_{n=1}^{\infty},\ \lim_{n\to\infty} t_n = -\infty \}$$

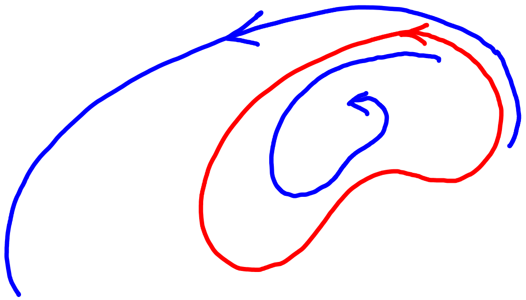
Przykład. Stabilne punkty krytyczne układów liniowych (węzły, ogniska) są przykładami zbiorów $\omega(p)$ dla wszystkich punktów p z ich dostatecznie małego otoczenia. Niestabilne węzły i ogniska są zbiorami $\alpha(p)$ dla punktów p z ich otoczenia.

Def. Jeśli istnieje orbita zamknięta γ, taka, że dla każdego y z pewnego otoczenia U zbioru γ mamy $\omega(y) = \gamma$ lub $\alpha(y) = \gamma$, to γ nazywamy cyklem granicznym.

Jeśli $\gamma = \omega(y)$ $\forall\, y \in U$ to jest to atraktor (stabilny cykl graniczny).

Jeśli $\gamma = \alpha(y)$ $\forall\, y \in U$ to jest to repeler (niestabilny cykl graniczny)


atraktor


repeler

Przykład. $\begin{cases} \dot{r} = r(r-1)(r-2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$ (r, θ) - współrzędne biegunowe $\gamma_1 = \{ r(t) \equiv 1, \ \theta(t) = t \}$ $\gamma_2 = \{ r(t) \equiv 2, \ \theta(t) = t \}$

$\dot{r} > 0$ dla $0 < r < 1$ Stąd γ_1 to atraktor, γ_2 to repeler.

$\dot{r} < 0$ dla $1 < r < 2$

$\dot{r} > 0$ dla $r > 2$

Tw. 1) Zbiór graniczny jest domknięty.

2) Zbiór graniczny zawiera całe trajektorie

3) Jeśli $x(t)$ jest ograniczony dla $t \to -\infty$ lub $t \to +\infty$ to zbiór graniczny α lub ω jest ograniczony.

4) $\alpha = \{x_0\}$ (lub $\omega = \{x_0\}$) $\Leftrightarrow$ $\lim_{t \to -\infty} x(t) = x_0$ (lub $\lim_{t \to +\infty} x(t) = x_0$)

Tw. (Poincarégo - Bendixsona) Przestrzeń fazowa $M \subset \mathbb{R}^2$. Jeżeli orbita zawiera co najmniej jeden swój punkt graniczny to jest ona punktem krytycznym lub orbitą zamkniętą.

Tw. Bendixona - Dulaca

Jeżeli $\exists\, \varphi(x,y)$ klasy C^1 taka, że $\frac{\partial(\varphi f)}{\partial x} + \frac{\partial(\varphi g)}{\partial y}$ ma ten sam znak w obszarze jednospójnym D to układ

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = f(x,y) \end{cases}$$

nie ma niestałych rozwiązań okresowych w D.

Dowód.: zał, że $\frac{\partial(\varphi f)}{\partial x} + \frac{\partial(\varphi g)}{\partial y} > 0$ w D. Niech C będzie orbitą zamkniętą w D. Niech Ω będzie taka, że $\partial\Omega = C$. Wtedy $\iint\limits_D \left(\frac{\partial(\varphi f)}{\partial x} + \frac{\partial(\varphi g)}{\partial y}\right) dx\, dy =$

$$= \oint\limits_C (-\varphi g\, dx + \varphi f\, dy) = \oint\limits_C \varphi(-\dot{y}\, dx + \dot{x}\, dy) = \int_{t_0}^{t_1} \varphi(-\dot{y}\dot{x}\, dt + \dot{x}\dot{y}\, dt) = 0$$

sprzeczność, bo $\frac{\partial(\varphi f)}{\partial x} + \frac{\partial(\varphi g)}{\partial y} > 0$ $\blacksquare$

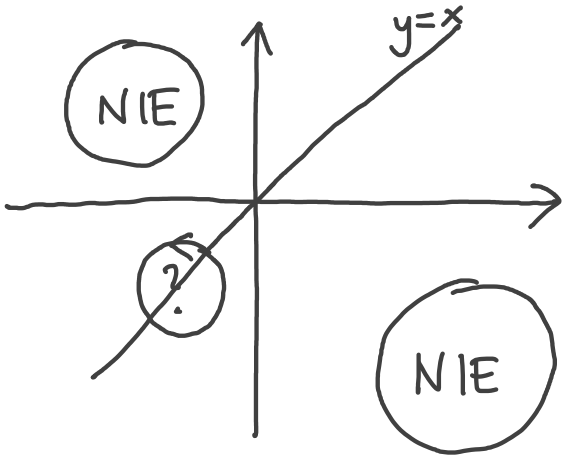
Przykład.

$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 + y^3 \\ \dot{y} = 3x + y^3 + 2y \end{cases}$$

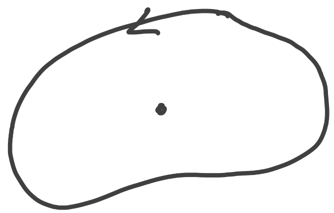
$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2 + 2 > 0$ Nie ma orbit zamkniętych na $\mathbb{R}^2$.

Przykład. $\ast\quad \begin{cases}\dot{x} = x^2+y^2+1\\ \dot{y} = x^2-y^2\end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y} = 2x-2y=0 \qquad x=y$$



Tw. Jeśli w D jest orbita zamknięta C to we wnętrzu C jest punkt krytyczny



$$\begin{cases}x^2+y^2+1=0\\ x^2-y^2=0\end{cases} \qquad \forall\ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad x^2+y^2+1>0$$

Nie ma punktów krytycznych $\overset{\text{Tw.}}{\Rightarrow}$ nie ma orbit zamkniętych.