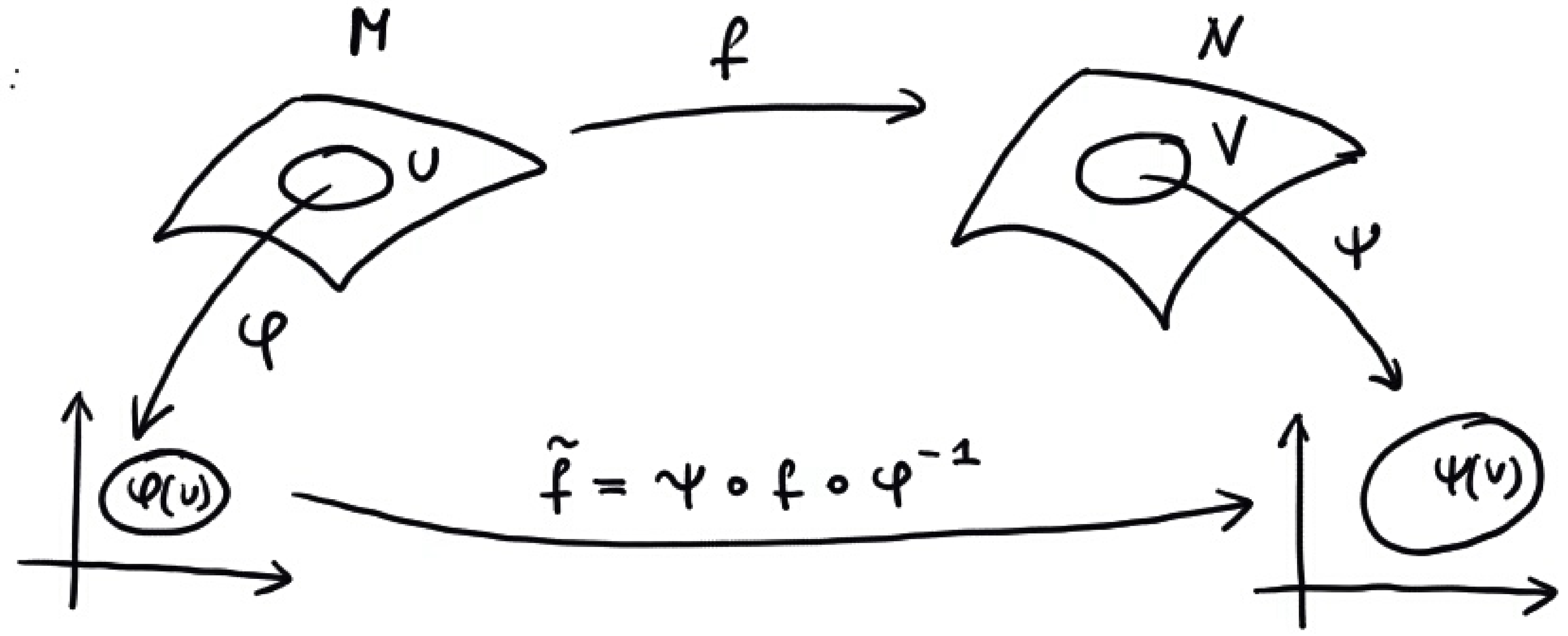
Wojciech Domitrz : Geometria różniczkowa, wykład 3

Tw. (o odwzorowaniu odwrotnym).
Jeśli $W \subset \mathbb{R}^n$ otwarty, $x_0 \in W$ i $f : W \to \mathbb{R}^n$ jest przekształceniem gładkim oraz $\det\left(\frac{\partial f^i}{\partial x_j}\right)\Big|_{x_0} \neq 0$, to istnieje otoczenie $W_0 \subset W$ punktu x_0 takie, że $f|_{W_0} : W_0 \to f(W_0)$ jest dyfeomorfizmem.

Tw. Niech M, N będą rozmaitościami gładkimi wymiaru n i $f : M \to N$ przekształcenie gładkie.
Jeśli $f_{*p} : T_p M \to T_p N$ jest izomorfizmem to $\exists U$ otoczenie punktu p w M takie, że $f(U)$ jest otoczeniem $f(p)$ w N oraz $f|_U : U \to f(U)$ jest dyfeomorfizmem.

Dowód:



f_{*p} - izomorfizm $\Rightarrow \det\left(\frac{\partial \tilde{f}^i}{\partial x_j}\right) \neq 0 \Rightarrow$ z tw. o odwzorowaniu odwrotnym otrzymujemy, że istnieje otoczenie W_0 punktu $x_0 = \varphi(p)$ takie, że $\tilde{f}|_{W_0} : W_0 \to \tilde{f}(W_0)$ jest dyfeomorfizmem $\Rightarrow f|_{\varphi^{-1}(W_0)} = \psi^{-1} \circ \tilde{f} \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(W_0)}$ jest dyfeomorfizmem na obraz ■

Tw. (*) Niech M będzie m-wymiarową rozmaitością gładką, a N n-wymiarową rozmaitością gładką, $m < n$.
Jeżeli $f : M \to N$ jest przekształceniem gładkim i f_{*p} jest niezdegenerowane (jest injekcją) to istnieje lokalny układ współrzędnych (U, φ) w otoczeniu p oraz (V, ψ) w otoczeniu $f(p)$ taki, że $f(U) \subset V$ oraz
$$(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(u^1, \dots, u^m) = (u^1, \dots, u^m, 0, \dots, 0)$$

Dowód: Niech $(U; (u^1, \dots, u^m))$ i $(V; v^1, \dots, v^n)$ będą układami współrzędnych w p i $f(p)$ odpowiednio t., że $v^j = f^j(u^1, \dots, u^m)$, $j = 1, \dots, n$ zał., że $u^i(p) = 0$, $i = 1, \dots, m$ oraz $v^j(f(p)) = 0$, $j = 1, \dots, n$. f_* jest niezdegenerowane to możemy zał., że $\frac{\partial(f^1, \dots, f^m)}{\partial(u^1, \dots, u^m)} \neq 0$.
Niech $I_{n-m} = (-\delta, \delta)^{n-m}$. Zmniejszając U i wybierając δ możemy zdefiniować $\tilde{f} : U \times I_{n-m} \to V$ t., że $\tilde{f}^i(u^1, \dots, u^m, w^{m+1}, \dots, w^n) = f^i(u^1, \dots, u^m)$ dla $i = 1, \dots, m$ i $\tilde{f}^k(u^1, \dots, u^m, w^{m+1}, \dots, w^n) = w^k + f^k(u^1, \dots, u^m)$ dla $k = m+1, \dots, n$. $\tilde{f}_*$ w $(0,0)$ jest niezdegenerowane. Stąd jest dyfeomorfizmem w otoczeniu $(0,0)$ czyli można założyć, że $\tilde{f} : U \times I_{n-m} \to V$ jest dyfeomorfizmem, a $(u^1, \dots, u^m, w^{m+1}, \dots, w^n)$ jest lokalnym układem współrzędnych w otoczeniu $f(p)$. W tych współrzędnych $f(u^1, \dots, u^m) = (u^1, \dots, u^m, 0, \dots, 0)$, gdyż $\tilde{f}|_{U \times \{0\}} = f$ ■

Def. Niech M, N gładkie rozmaitości. Jeśli istnieje przekształcenie gładkie $f: M \to N$ takie, że $\forall p \in M$ przekształcenie $f_{*p}: T_pM \to T_{f(p)}M$ jest niezdegenerowane to f nazywamy immersją i (f, M) nazywamy immersyjną podrozmaitością rozmaitości N. Jeśli dodatkowo f jest injekcją to f nazywamy zanurzeniem i (f, M) nazywamy gładką podrozmaitością lub podrozmaitością zanurzeniową rozmaitości N.

Przykład 1. (Podrozmaitości otwarte) $U \subset N$ otwarty. Obcinamy strukturę różniczkową na N do U. Wtedy U jest rozmaitością gładką $\dim U = \dim N$. $id_U: U \hookrightarrow N$. Wtedy (id_U, U) jest podrozmaitością zanurzeniową zwaną podrozmaitością otwartą.

Przykład 2. (Podrozmaitości domknięte) Niech (f, M) będzie podrozmaitością gładką rozmaitości N taką, że
1) $f(M)$ jest domkniętym podzbiorem N 2) $\forall q \in f(M)$ $\exists (U, \varphi)$ układ współrzędnych na N taki, że

$$\varphi(f(M) \cap U) = \{(u^1, \dots, u^n) \in \varphi(U) \mid u^{m+1} = \dots = u^n = 0\}, \quad \text{gdzie } n = \dim N \text{ i } m = \dim M,$$

to (f, M) nazywamy podrozmaitością domkniętą rozmaitości N.

Niech $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ i $id_{S^n}: S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Wtedy (id_{S^n}, S^n) jest podrozmaitością domkniętą $\mathbb{R}^{n+1}$.

Przykład 3. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $f(t) = (2\cos(t - \frac{\pi}{2}), \sin 2(t - \frac{\pi}{2}))$. Patrz Rysunek 1 na str. 3. $(f, \mathbb{R})$ jest immersyjną podrozmaitością ale nie jest gładką podrozmaitością.

Przykład 4. $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $g(t) = (-2\sin(2\operatorname{arctg}(t)), \sin(4\operatorname{arctg}(t)))$. Patrz Rysunek 2 na str. 4. $(g, \mathbb{R})$ jest podrozmaitością gładką.
Dla $g(0) = (0,0)$, ale również $\lim_{t \to \pm\infty} g(t) = (0,0)$. Stąd $(g, \mathbb{R})$ nie jest podrozmaitością domkniętą $\mathbb{R}^2$.

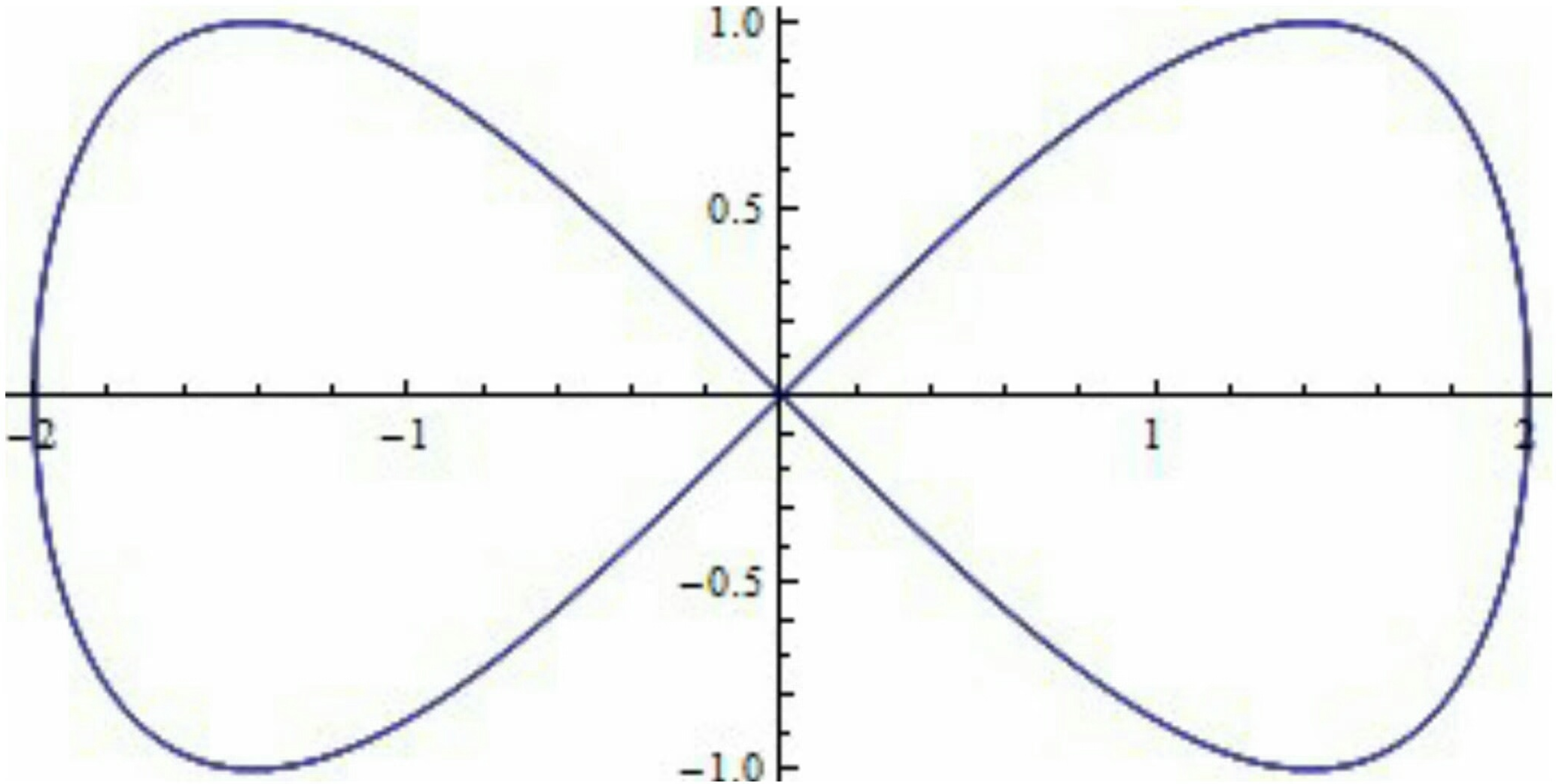
Przykład 5. $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $h(t) = (\cos 2t \sin t, \cos 2t \cos t)$. Patrz Rysunek 3 na str. 5. $(h, \mathbb{R})$ jest immersyjną podrozmaitością, ale nie jest podrozmaitością gładką.

Przykład 6. Warszawska (zagęszczona) sinusoida

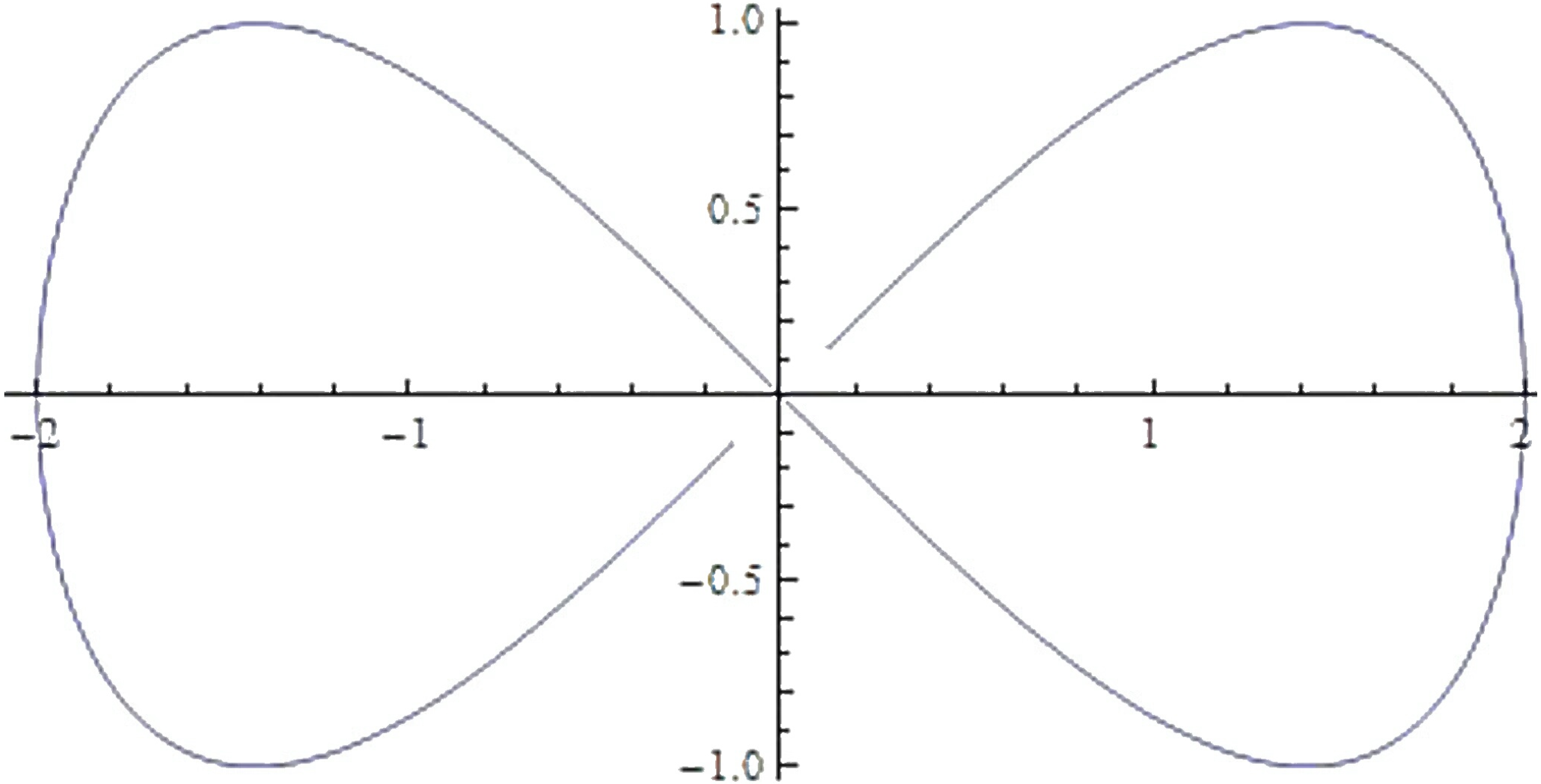
$$s(t) = \begin{cases} (t, \sin\frac{1}{t}) & \text{dla } t \in (0, \frac{1}{\pi}) \\ \text{krzywa gładka łącząca punkty } (\frac{1}{\pi}, 0) \text{ i } (0, 1) & \text{dla } t \in [\frac{1}{\pi}, 1] \\ (0, 2-t) & \text{dla } t \in [1, 3) \end{cases}.$$

Patrz Rysunek 4 na str. 6. Wtedy $(s, (0,3))$ jest podrozmaitością gładką, ale nie jest podrozmaitością domkniętą.

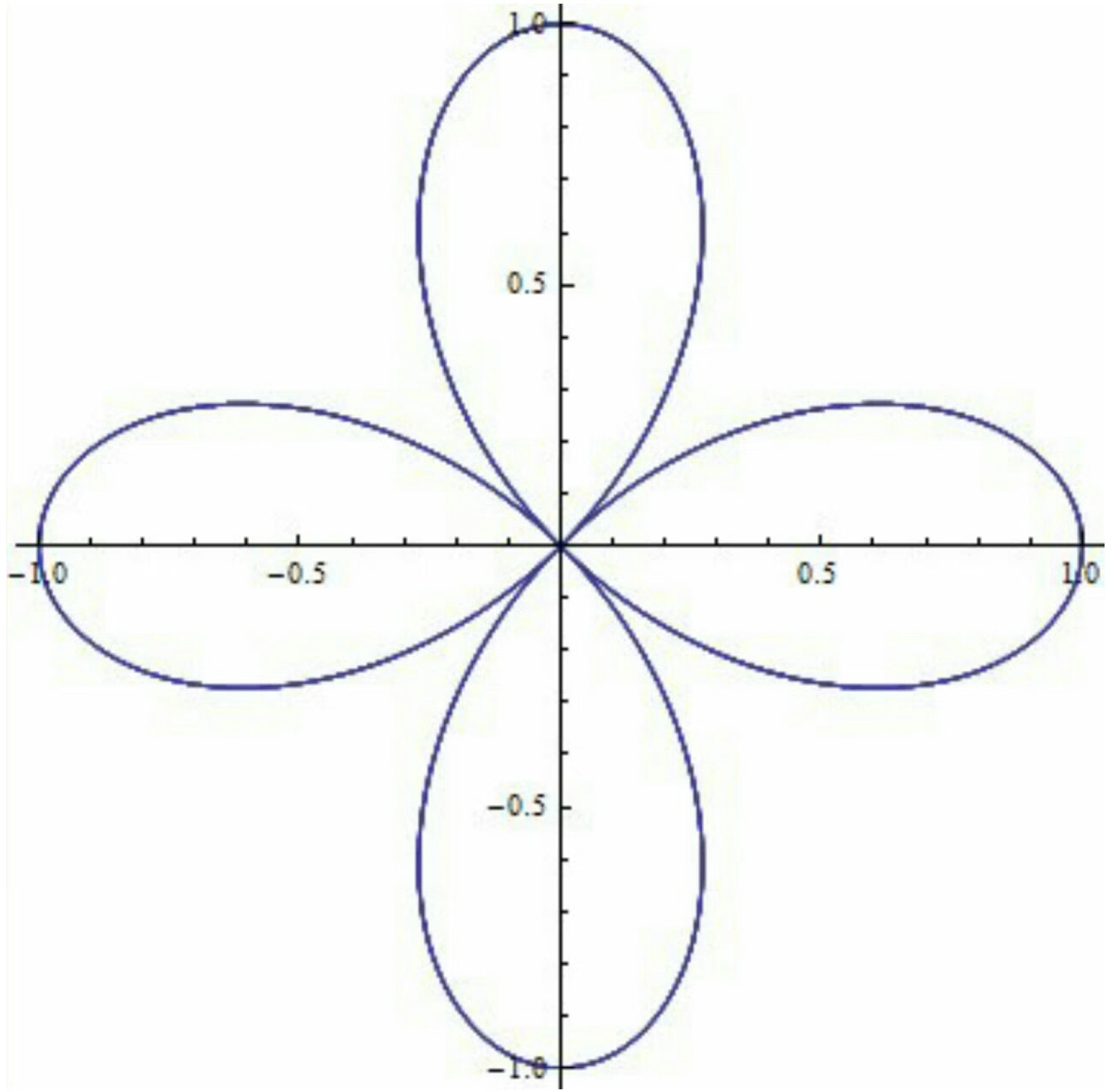
Rysunek 1.

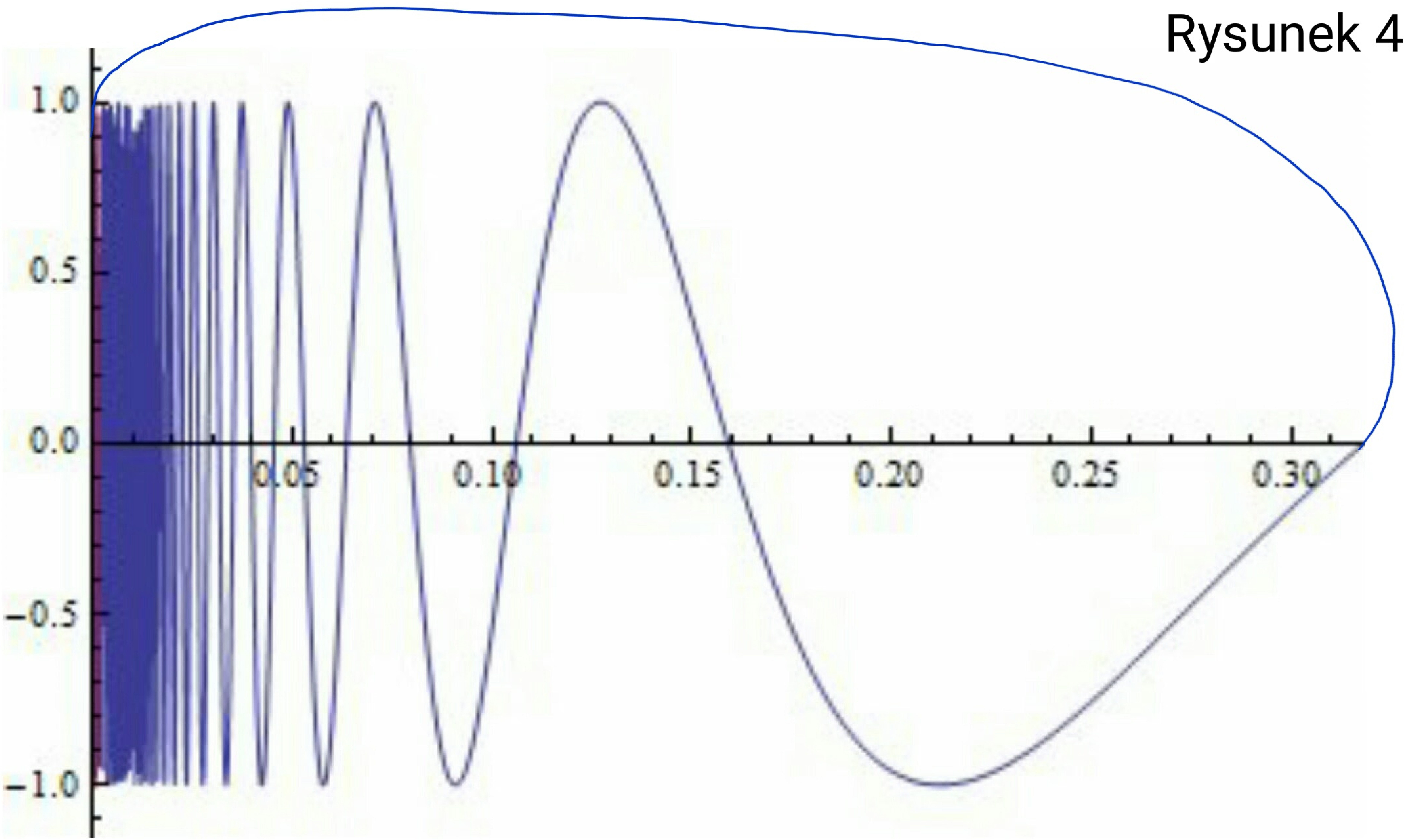


Rysunek 2



Rysunek 3





Rysunek 4

Przykład 7. Torus $T^2 = S^1 \times S^1$ jest 2-wymiarową rozmaitością. Możemy ją przedstawić jako kwadrat jednostkowy podzielony przez relację utożsamiające punkty na brzegach przeciwległych $(0,x) \sim (1,x)$ i $(x,0) \sim (x,1)$ lub jako $\mathbb{R}^2$ podzielony przez relację $(x,y) \sim (x',y')$ jeśli $x - x' \in \mathbb{Z}$ i $y - y' \in \mathbb{Z}$ czyli $x = x' \bmod 1$ i $y = y' \bmod 1$.

Niech $a, b \in \mathbb{R}$. $r(t) = (at \bmod 1,\ bt \bmod 1)$.

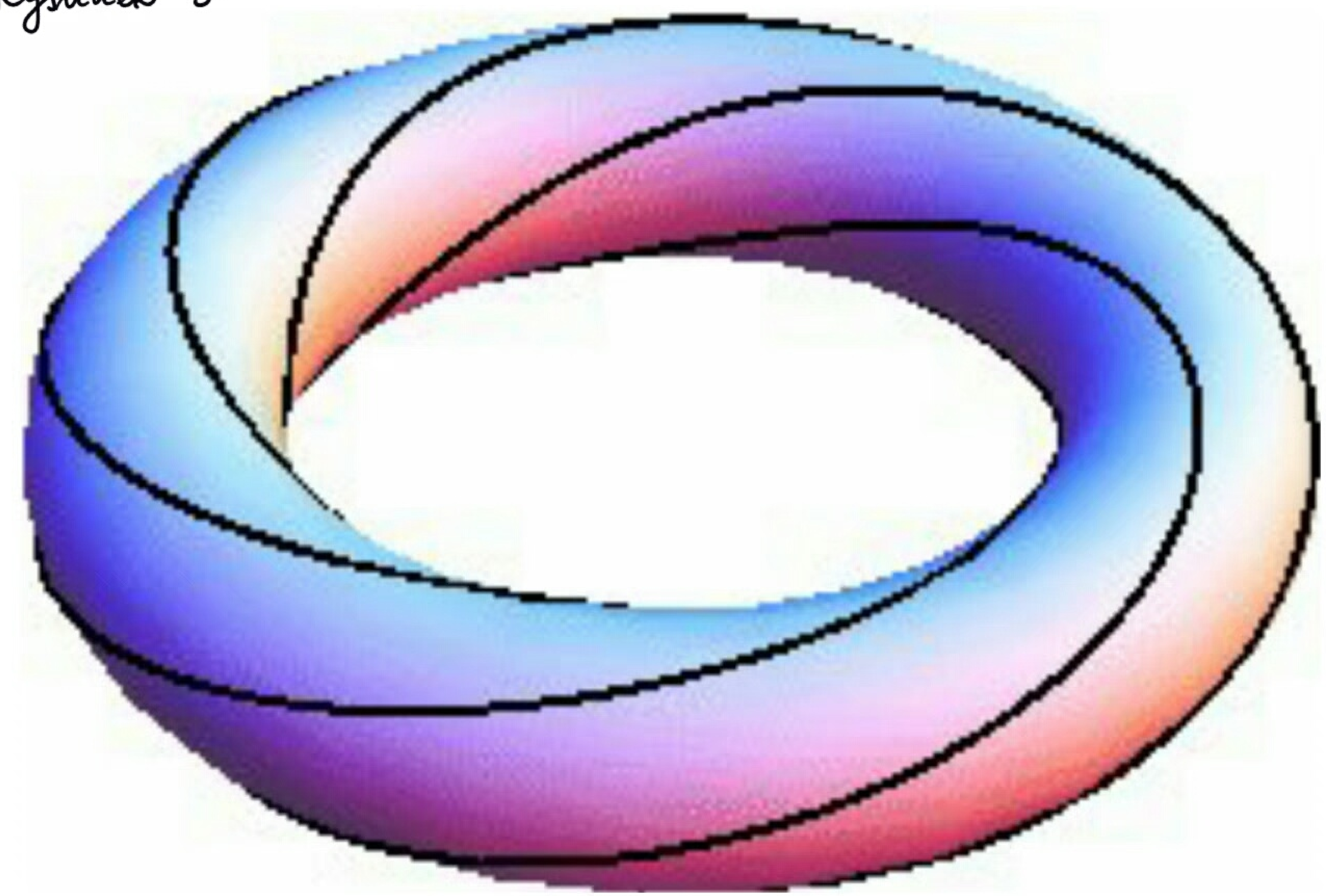
Jeżeli $\frac{a}{b} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ to $(r, \mathbb{R})$ jest podrozmaitością gładką T^2, ale $r(\mathbb{R})$ jest gęsty w T^2.

Jeżeli $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ to $(r, \mathbb{R})$ jest podrozmaitością immersyjną. Dowód: $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ $\frac{n}{b} = \frac{m}{a} = q$

$$\varphi(t+q) = (a(t+q), b(t+q)) = (at + aq, bt + bq) = (at + m, bt + n) = (at, bt) = \varphi(t)$$

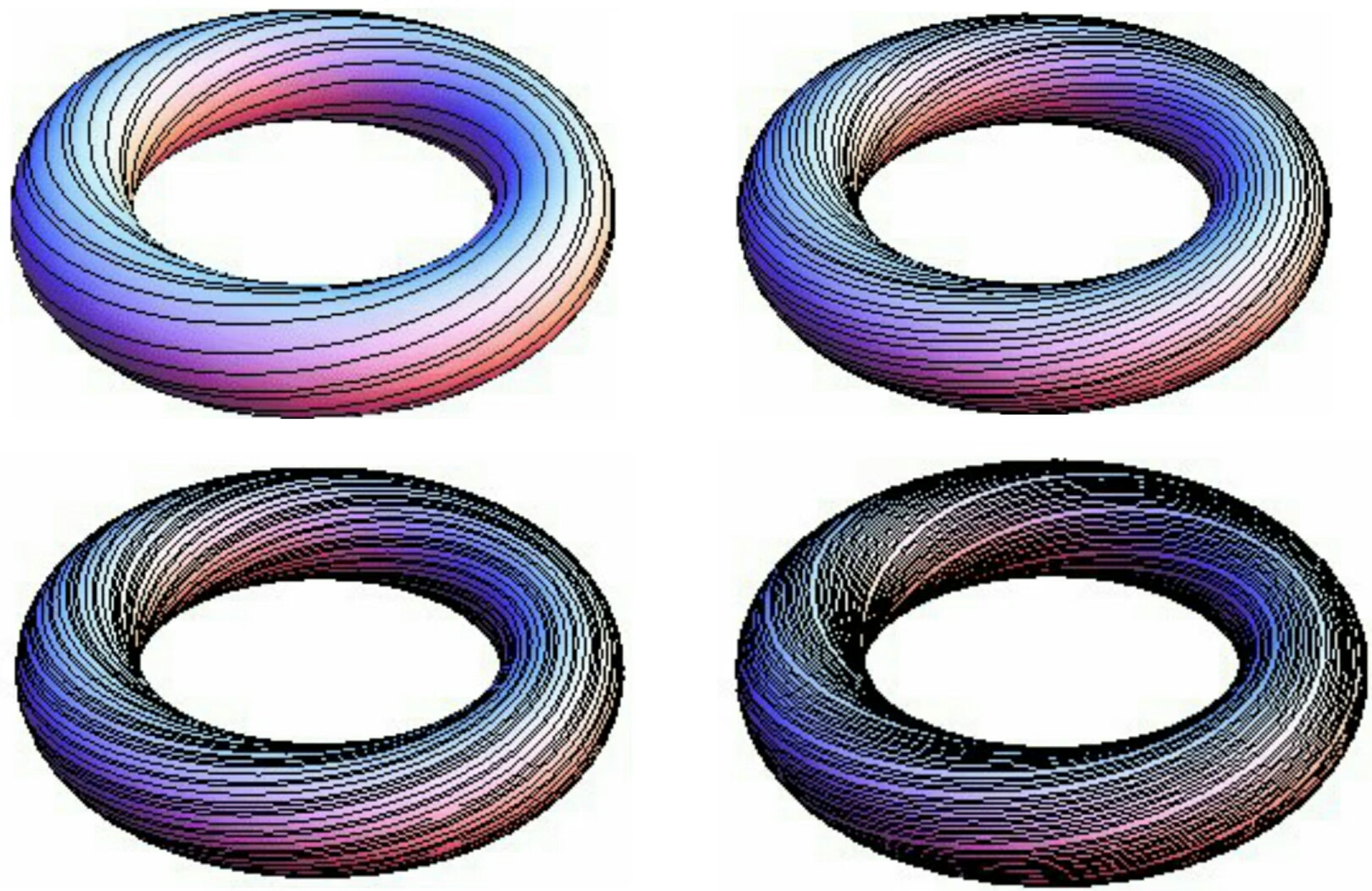
Na Rysunku 5 przedstawiono obraz r dla $r(t) = (6t \bmod 1, 5t \bmod 1)$ czyli $\frac{a}{b} = \frac{6}{5}$

Rysunek 5



Na Rysunku 6 przedstawiono obrazy $\varphi((0;100))$, $\varphi((0;200))$, $\varphi((0;300))$, $\varphi((0;400))$, gdzie $\varphi(t) = (t \bmod 1, \sqrt{2}\, t \bmod 1)$ czyli $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{2}}{2} \notin \mathbb{Q}$. Obraz $\varphi(\mathbb{R})$ jest gęsty w T^2.

Rysunek 6.



Jeżeli (f, M) jest podrozmaitością gładką to f jest injekcją i struktura różniczkowa z M może być przeniesiona na $f(M)$. Wtedy $f: M \to f(M)$ staje się dyfeomorfizmem.

Z drugiej strony $f(M) \subset N$. Stąd na $f(M)$ można wprowadzić topologię indukowaną z N.

Poprzednie przykłady, że topologie otrzymane z M za pomocą f i topologia indukowana z N nie muszą się zgadzać. Ogólnie topologia z M przeniesiona za pomocą f jest silniejsza od topologii indukowanej z N, bo f jest ciągłe.

Def. Niech (f, M) będzie gładką podrozmaitością N. (f, M) jest podrozmaitością regularną jeśli $f: M \to f(M) \subset N$ jest homeomorfizmem na $f(M)$. $f: N \to M$ nazywamy wtedy zanurzeniem regularnym M w N.

Tw. Niech (f, M) będzie podrozmaitością gładką N.

(f, M) jest podrozmaitością regularną $N \iff (f, M)$ jest podrozmaitością domkniętą otwartej podrozmaitości N

Dowód.: $\Leftarrow$ Niech $p \in M$. Z def. podrozmaitości domkniętej istnieje układ współrzędnych $(V, v^1, \dots, v^n)$ w $f(p)$ na N t. że $f(M) \cap V$ w tym układzie współrzędnych jest dany (**) $v^{m+1} = \dots = v^n = 0$. f jest ciągłe. Stąd istnieje lokalny układ współrzędnych $(U; u^1, \dots, u^m)$ w p na M t. że $f(U) \subset V$. Możemy żąć, że $u^i(p) = 0$ dla $i = 1, \dots, m$ oraz $v^j(f(p)) = 0$ dla $j = 1, \dots, n$ oraz $V = (-\delta, \delta)^n$. $f(U) \subset f(M) \cap V$.

Trzeba udowodnić, że $f^{-1}: f(M) \to M$ jest ciągłe. Wystarczy pokazać, że istn. $\delta_1 > 0$ t. że $f(M) \cap (-\delta_1, \delta_1)^n \subset f(U)$

Z (**) otrzymujemy, że $f|U$ jest zadany w układzie współrzędnych wzorami $v^i = f^i(u^1, \dots, u^m)$ dla $i = 1, \dots, m$ oraz $v^k = 0$ dla $k = m+1, \dots, n$. Stąd Jacobian $\frac{\partial(f^1, \dots, f^m)}{\partial(u^1, \dots, u^m)} \neq 0$. Więc z tw. o odwzorowaniu odwrotnym (patrz str. 1) istnieje δ_1 t. że $0 < \delta_1 < \delta$ oraz odwzorowanie odwrotne $u^i = g^i(v^1, \dots, v^m)$ $|v^i| < \delta_1$ $i = 1, \dots, m$ dla $(f^1, \dots, f^m)$

Niech $V_1 = (-\delta_1, \delta_1)^n$. Wtedy $f(M) \cap V_1 \subset f(U)$.

$\Rightarrow$ Zał., że (f,M) jest regularną podrozmaitością N. Niech $p \in M$. Dla każdego otoczenia $U \subset M$ punktu p istnieje otoczenie V punktu $f(p)$ t, że $f(U) = f(M) \cap V$. Z Tw (*) (patrz str. 1) istnieje układ współrzędnych $(U_1, u^1, \dots, u^m)$ dla p oraz $(V_1; v^1, \dots, v^n)$ dla $f(p)$ takie, że $f(U_1) \subset V_1$ oraz $f(u^1, \dots, u^m) = (u^1, \dots, u^m, 0, \dots, 0)$ w tych układach.

Możemy założyć, że $U_1 \subset U$. Możemy wybrać $V_1 \subset V$ taki, że $f(U_1) = f(M) \cap V_1$ i $f(M) \cap V_1$ jest zdefiniowany przez $v^{m+1} = \dots = v^n = 0$. (***)

$\forall q \in f(M)$ niech V_q oznacza otoczenie $q = f(p)$ w N skonstruowane powyżej spełniające (***)

Niech $W = \bigcup_{q \in f(M)} V_q$. W jest otwartą podrozmaitością N zawierającą $f(M)$. Trzeba pokazać, że $f(M)$ jest relatywnie domknięte w W tzn. $\overline{f(M)} \cap W = f(M)$, gdzie $\overline{f(M)}$ oznacza domknięcie $f(M)$ w N. Niech $s \in W \cap \overline{f(M)}$.

Z definicji W $\exists q \in f(M)$ taki, że $s \in V_q$. Z (***) wynika że $f(M) \cap V_q$ to $v^{m+1} = \dots = v^n = 0$ czyli $f(M) \cap V_q$ w V_q jest relatywnie domkniętym podzbiorem V_q. $s \in \overline{f(M)} \cap V_q \Rightarrow s$ należy do relatywnego domknięcia $f(M) \cap V_q$ w V_q czyli $s \in f(M) \cap V_q$. Stąd $W \cap \overline{f(M)} \subset f(M)$. Stąd $W \cap \overline{f(M)} = f(M)$. Stąd (f,M) jest podrozmaitością domkniętą otwartej podrozmaitości W rozmaitości N. ■

Wniosek. Podrozmaitość gładka (f,M) rozmaitości N jest regularną podrozmaitością $\Leftrightarrow$ $\forall p \in M$ $\exists (V, v^1, \dots, v^n)$ układ współrzędnych $f(p)$ w N t, że $v^i(f(p)) = 0$ dla $i = 1, \dots, n$ oraz $f(M) \cap N$ jest opisany

$v^{m+1} = v^{m+2} = \dots = v^n = 0$.

Tw. Niech (f, M) będzie podrozmaitością gładką rozmaitości gładkiej N. Jeżeli M jest zwarty to (f, M) jest regularną podrozmaitością.

Dowód.: $f(M)$ jest podprzestrzenią topologiczną N – przestrzeń Hausdorffa. Stąd $f(M)$ jest przestrzenią Hausdorffa.

$f: M \to f(M)$ jest 1-1 ciągłym przekształceniem ze zbioru zwartego w przestrzeń Hausdorffa.

Pokażemy, że $f: M \to f(M)$ jest homeomorfizmem. Niech $g = f^{-1}: f(M) \to M$. Niech $B \subset M$ domknięty.

M – zwarty. Stąd B – zwarty (Lemat 1). $g^{-1}(B) = f(B)$ B – zwarty to $f(B)$ – zwarty, bo f – ciągłe.

$f(B)$ – zwarty $f(B) \subset f(M)$ – p. Hausdorffa to $f(B)$ – domknięty (Lemat 2). Czyli g^{-1} – ciągłe.

Stąd f jest homeomorfizmem. ■

Lemat 1. $B \subset M$ M – zwarty, B domknięty $\Rightarrow$ B zwarty

Dowód lematu 1. Niech U_i – otwarty dla $i \in I$ $\bigcup_{i \in I} U_i \supset B$ $(M \setminus B) \cup \bigcup_{i \in I} U_i \supset M$ zwarty $\Rightarrow$ $\bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k} \cup (M - B) \supset M$

$\bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k} \supset B$ ■

Lemat 2. X – przestrzeń Hausdorffa, $B \subset X$, B – zwarty $\Rightarrow$ B – domknięty

Dowód lematu 2. Pokażemy, że $X - B$ jest otwarty. Niech $x \in X - B$, $b \in B$ $x \neq b$ X – p. Hausdorffa to $\exists U(b) \ni x$ $U(b)$ otwarty oraz $\exists V(b) \ni b$ otwarty $U(b) \cap V(b) = \emptyset$ $\bigcup_{b \in B} V(b) \supset B$ – zwarty $\Rightarrow$ $\bigcup_{k=1}^{n} V(b_k) \supset B$

$\bigcap_{k=1}^{n} U(b_k)$ – otwarty $V(b_k) \cap U(b_k) = \emptyset$ $\bigcap_{l=1}^{n} U(b_l) \cap V(b_k) = \emptyset$ dla $k = 1, \ldots, n \Rightarrow \bigcap_{l=1}^{n} U(b_l) \cap \bigcup_{k=1}^{n} V(b_k) = \emptyset$

$\Rightarrow B \subset \bigcup_{k=1}^{n} V(b_k) \Rightarrow \bigcap_{l=1}^{n} U(b_l) \cap B = \emptyset \Rightarrow \bigcap_{l=1}^{n} U(b_l) \subset X - B$ $x \in U(b_l)$ dla $l = 1, \ldots, n$

$x \in \bigcap_{l=1}^{n} V(b_l)$ – otwarty ■