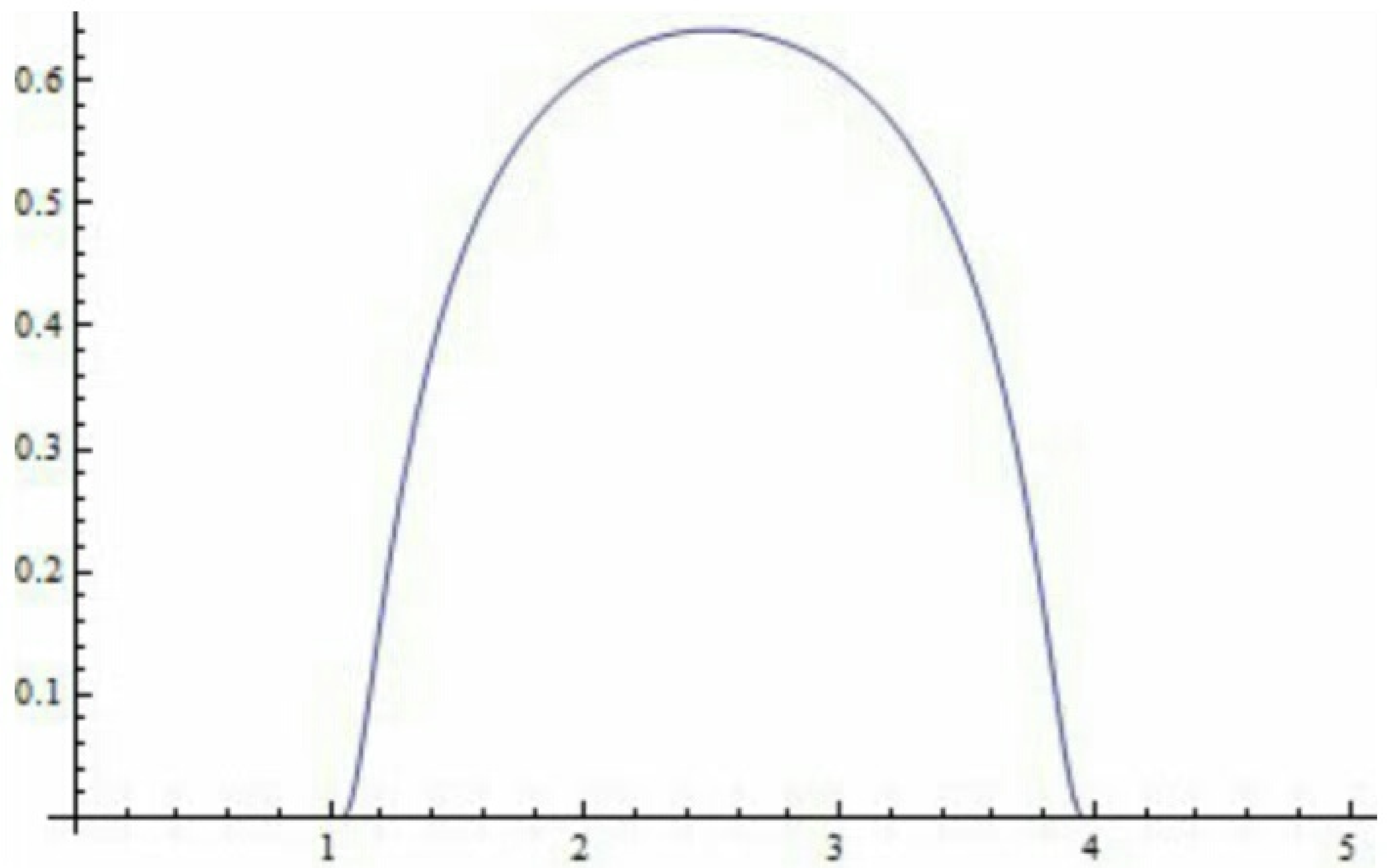
Wojciech Domitrz : Geometria różniczkowa, wykład 4

Lemat 1. Niech D_1, D_2 będą dwiema kulami o wspólnym środku w $\mathbb{R}^m$ takimi, że $\overline{D_1} \subset D_2$. Wtedy istnieje gładka funkcja f na $\mathbb{R}^m$ taka, że 1) $0 \le f \le 1$ 2) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in D_1 \\ 0 & \text{dla } x \in \mathbb{R}^m - D_2 \end{cases}$

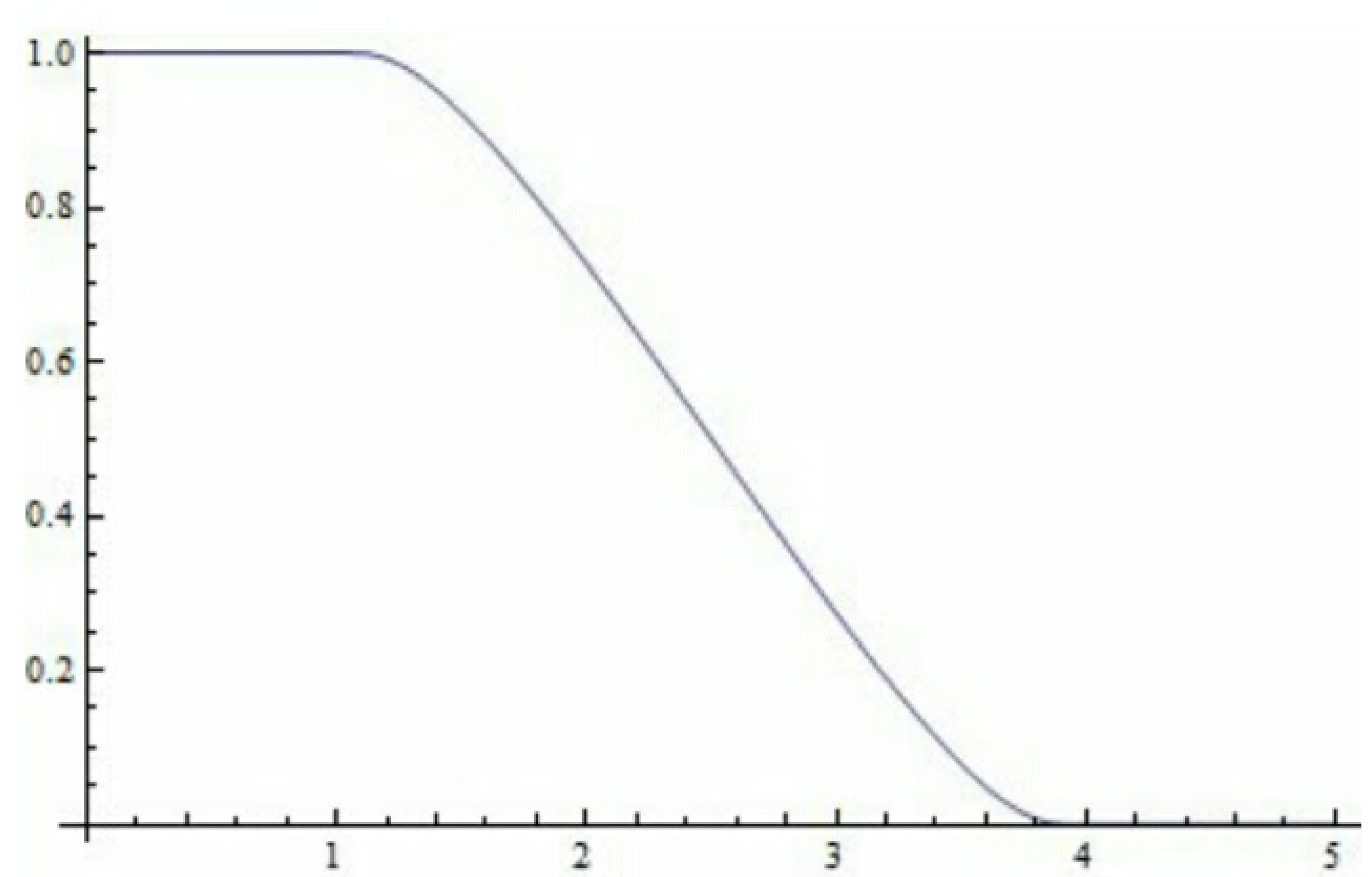
Dowód.: Załóżmy, że D_1, D_2 mają środek w $0 \in \mathbb{R}^m$ z promieniami $a < b$ odpowiednio. Niech $g(t) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{(t-a^2)(t-b^2)}\right) & \text{dla } t \in (a^2, b^2) \\ 0 & \text{dla } t \notin (a^2, b^2) \end{cases}$

Niech $F(t) = \int_t^{\infty} g(s)\,ds \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} g(s)\,ds$. Wtedy $F(t)$ jest gładką funkcją na $\mathbb{R}$ oraz $0 \le F \le 1$.

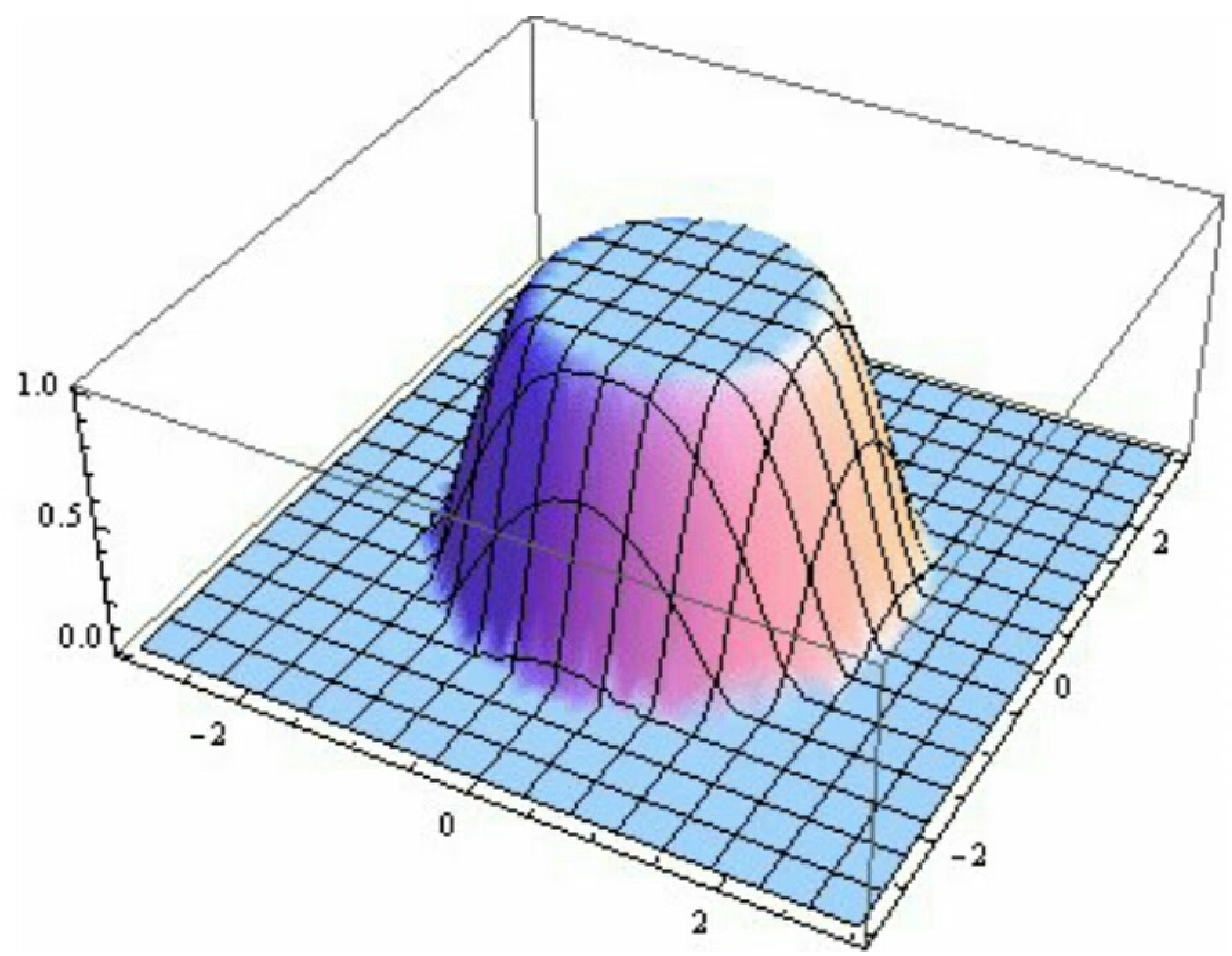
Jeśli $t \le a^2$ to $F(t) = 1$, $t \ge b^2$ to $F(t) = 0$. Niech $f(x^1, \dots, x^m) = F((x^1)^2 + \dots + (x^m)^2)$. Wtedy f spełnia warunki.



Rysunek 1. Wykres funkcji $g(t)$
$a = 1$, $b = 2$



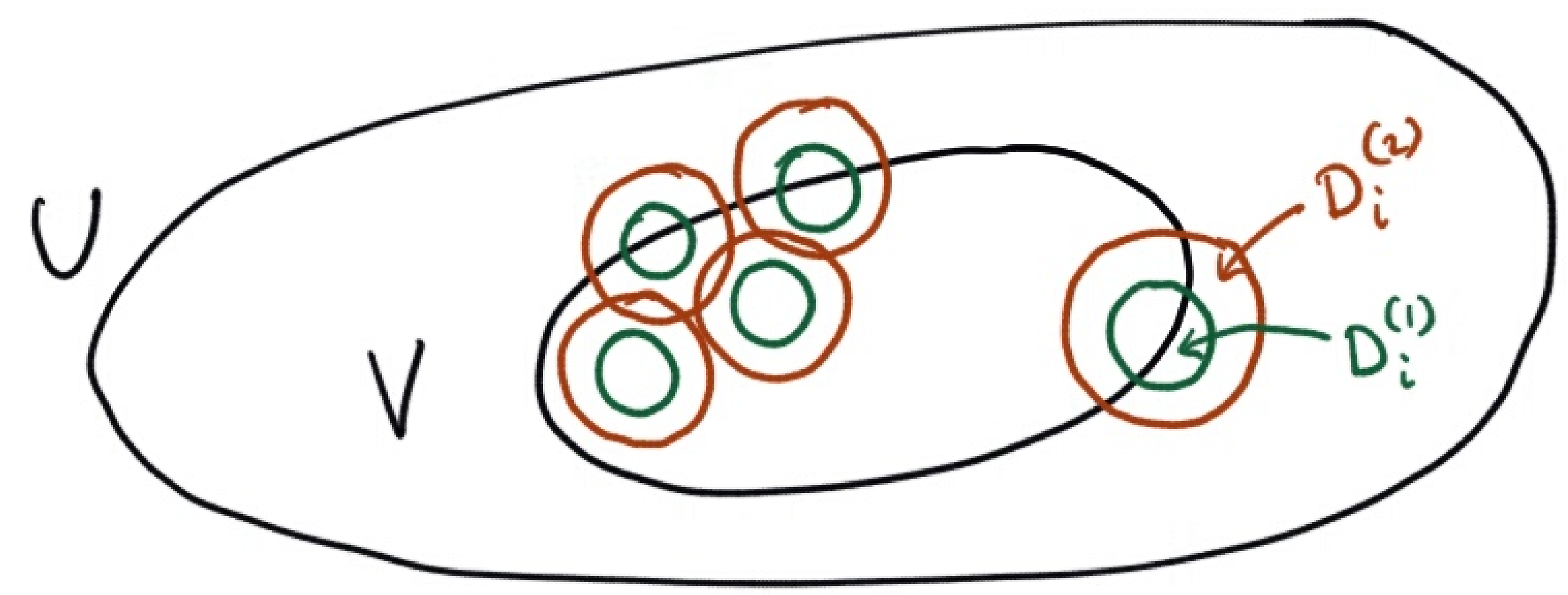
Rysunek 2. Wykres funkcji $F(t)$
$a = 1$, $b = 2$



Rysunek 3. Wykres funkcji $f(x_1, x_2)$ dla $m = 2$.
$D_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$, $D_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \le 4\}$

Lemat 2. Niech U, V będą niepustymi podzbiorami $\mathbb{R}^m$ takimi, że $\overline{V}$ jest zwarty oraz $\overline{V} \subset U$. Wtedy istnieje funkcja gładka f na $\mathbb{R}^m$ taka, że 1) $0 \leq f \leq 1$ oraz 2) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in V \\ 0 & x \in \mathbb{R}^m - U \end{cases}$.

Dowód: $\overline{V}$ jest zwarty oraz $\overline{V} \subset U$. Stąd istnieje skończony zbiór kul $\{D_i^{(1)}, D_i^{(2)}\}_{1 \leq i \leq r}$ takich, że $D_i^{(1)}, D_i^{(2)}$ mają wspólne środki oraz $\overline{D_i^{(1)}} \subset D_i^{(2)} \subset U$ oraz $\{D_i^{(1)}\}_{1 \leq i \leq r}$ jest pokryciem otwartym zbioru $\overline{V}$. Z lematu 1 dla każdego $1 \leq i \leq r$ istnieje funkcja gładka f_i na $\mathbb{R}^m$ taka, że $0 \leq f_i \leq 1$ oraz $f_i(x) = \begin{cases} 1 & x \in D_i^{(1)} \\ 0 & x \notin D_i^{(2)} \end{cases}$ Niech $f = 1 - \prod_{i=1}^{r}(1 - f_i)$ ∎



$D_i^{(1)} \subset D_i^{(2)} \subset U$

$\bigcup_{i=1}^{r} D_i^{(1)} \supset \overline{V}$

Lemat 3. Niech (U, φ_U) będzie mapą na rozmaitości M oraz $V \neq \emptyset$ niech będzie podzbiorem otwartym rozmaitości M takim, że $\overline{V}$ jest zwarty i $\overline{V} \subset U$. Wtedy istnieje funkcja gładka h na M taka, że 1) $0 \leq h \leq 1$ 2) $h(p) = \begin{cases} 1 & p \in V \\ 0 & p \notin U \end{cases}$

Dowód: $\overline{V}$ jest zwarty oraz $\overline{V} \subset U$. Istnieje zbiór otwarty U_1 taki, że $\overline{V} \subset U_1 \subset \overline{U_1} \subset U$. Niech $\dim M = m$. Wtedy $\varphi_U(V)$ i $\varphi_U(U_1)$ są otwartymi podzbiorami $\mathbb{R}^m$. Z lematu 2 wynika istnienie funkcji gładkiej f na $\mathbb{R}^m$ t, że $0 \leq f \leq 1$ oraz

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in \varphi_U(V) \\ 0 & \text{dla } x \notin \varphi_U(U_1) \end{cases} \qquad \text{Niech} \qquad h(p) = \begin{cases} f(\varphi_U(p)) & \text{dla } p \in U \\ 0 & \text{dla } p \notin U \end{cases}$$

Wtedy h jest funkcją gładką na M spełniającą warunki lematu 3. ∎

Tw. Niech M będzie zwartą m-wymiarową gładką rozmaitością. Wtedy istnieje $n \in \mathbb{N}$ i gładkie przekształcenie $\varphi : M \to \mathbb{R}^n$ takie, że (φ, M) jest regularną podrozmaitością $\mathbb{R}^n$.

Dowód: M jest zwartą rozmaitością. Istnieje więc skończone otwarte pokrycie $\{V_j\}_{1 \le j \le r}$ rozmaitości M t. że $\overline{V_j}$ jest zwarty i $\overline{V_j} \subset U_j$ dla pewnej mapy (U_j, φ_j) $\varphi_j = (\varphi_j^1, \dots, \varphi_j^m) : U_j \to \mathbb{R}^m$.

Niech W_j - będzie zbiorem otwartym t. że $\overline{V_j} \subset W_j \subset \overline{W_j} \subset U_j$. Z lematu 3 $\forall\, j = 1, \dots, r$ $\exists\, f_j$ - funkcja gładka na M taka, że $0 \le f_j \le 1$ oraz $f_j(p) = \begin{cases} 1 & \text{dla } p \in W_j \\ 0 & \text{dla } p \notin W_j \end{cases}$. Zdefiniujmy $n = r(m+1)$ funkcji gładkich na M w następujący sposób: $x_j^0 = f_j$ i $x_j^i(p) = \begin{cases} \varphi_j^i(p)\, f_j(p) & \text{dla } p \in U_j \\ 0 & \text{dle } p \notin U_j \end{cases}$ $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, r$. Wtedy $(x_j^0, x_j^i)_{j=1,\dots,m,\, i=1,\dots,r}$ jest punktem w $\mathbb{R}^n$. $\varphi(p) = (x_1^0(p), \dots, x_m^0(p), \dots, x_1^r(p), \dots, x_m^r(p))$ jest przekształceniem $\varphi : M \to \mathbb{R}^n$ gładkim.

Zał., że $\varphi(p) = \varphi(q)$. $\bigcup_{j=1}^{r} V_j = M \Rightarrow \exists\, k = 1, \dots, r$ t. że $p \in V_k$. Wtedy $f_k(q) = x_k^0(q) = x_k^0(p) = f_k(p) = 1 \Rightarrow u_k^i(q) = u_k^i(p)$ dla $i = 1, \dots, m$ czyli $\varphi_k(p) = \varphi_k(q) \Rightarrow p = q$. Stąd φ jest injekcją. Niech $p \in M$. $\exists\, k = 1, \dots, r$ $p \in V_k$. Wtedy $f_k(p) = 1$. Stąd $x_k^i|_{V_k} = \varphi_k^i$. Niech $(u_1, \dots, u^m)$ będzie układem współrzędnych na $\mathbb{R}^m$.

Rozważmy przekształcenie $(x_k^1, \dots, x_k^m) : V_k \to \mathbb{R}^m$. Jest to przekształcenie $\varphi_k : V_k \to \mathbb{R}^m$. Stąd $\varphi_k \circ \varphi_k^{-1} = id_{V_k}$ więc φ_{*p} jest niezdegenerowane. Przekształcenie φ jest więc zanurzeniem ze zwartej rozmaitości jest więc zanurzeniem regularnym (patrz ostatnie tw. poprzedniego wykładu) ∎