1) Rozmaitości i przekształcenia gładkie

$U \subset \mathbb{R}^k$ $\quad V \subset \mathbb{R}^l$ otwarte podzbiory

Def. $f: U \to V$ jest gładkie jeżeli istnieją pochodne cząstkowe $\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}}$ i są one ciągłe

$X \subset \mathbb{R}^k$ $\quad Y \subset \mathbb{R}^l$ dowolne podzbiory

Def. $f: X \to Y$ jest gładkie, jeśli $\forall x \in X$ $\exists U \subset \mathbb{R}^k$ otwarty $x \in U$ i $F: U \to \mathbb{R}^l$ gładkie takie, że $F|_{U \cap X} = f|_{U \cap X}$.

Stw. $f: X \to Y$ i $g: Y \to Z$ gładkie to $g \circ f: X \to Z$ gładkie.

$Id: X \to X$ $\quad Id(x) = x$ jest przekształceniem gładkim.

Def. $f: X \to Y$ jest dyfeomorfizmem jeżeli $f: X \to Y$ homeomorfizm oraz f i f^{-1} są gładkie.

Topologia różniczkowa bada własności zbiorów $X \subset \mathbb{R}^k$, które są niezmiennikami dyfeomorfizmów.

X nie jest dowolnym podzbiorem

Def. Podzbiór $M \subset \mathbb{R}^k$ jest rozmaitością gładką o wymiarze m, jeżeli $\forall x \in M$ $\exists W$ otwarty w $\mathbb{R}^k$ taki, że $x \in W \cap M$ oraz $W \cap M$ jest dyfeomorficzny z otwartym podzbiorem U przestrzeni $\mathbb{R}^m$.

Każdy dyfeomorfizm $g: U \to M \cap W$ nazywa się parametryzacją obszaru $W \cap M$.

$g^{-1}: M \cap W \to U$ to mapa albo układ współrzędnych w $W \cap M$

Rozmaitość o wymiarze zero to zbiór M taki, że każdy punkt $x \in M$ posiada otoczenie W takie, że $W \cap M = \{x\}$.

Przykłady. 1) $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$ – rozmaitość 2-wymiarowa

$(x,y) \mapsto (x,y,\sqrt{1-x^2-y^2})$ parametryzacja obszaru $S^2 \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$

$(x,y) \mapsto (x,y,-\sqrt{1-x^2-y^2})$ $\qquad z<0$

$(x,y) \mapsto (x,\sqrt{1-x^2-z^2},z)$ $\qquad y>0$ itd.

2) $S^{n-1} = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$ rozmaitość $(n-1)$-wymiarowa

3) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \quad y = \sin(\frac{1}{x})\}$ rozmaitość 1-wymiarowa

4) $U \subset \mathbb{R}^k$ otwarty $\qquad id_U : U \to U \qquad U$ – rozmaitość k-wymiarowa

Przestrzenie styczne i pochodna

Def. $U \subset \mathbb{R}^k$ otwarty i $x \in U$

Przestrzeń styczna do U w punkcie x to $T_x U = \mathbb{R}^k$

Def. $V \subset \mathbb{R}^l$ otwarty $f : U \to V$ gładkie

Pochodna (różniczka) przekształcenia f w punkcie x to przekształcenie liniowe

$$df_x : \underset{\mathbb{R}^k}{\overset{\parallel}{T_x U}} \to \underset{\mathbb{R}^l}{\overset{\parallel}{T_x V}} \quad \text{dane wzorem} \quad df_x(h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t} = \sum_{i=1}^{k} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{\substack{i=1,\dots,l \\ j=1,\dots,k}} \cdot h$$

gdzie $x = (x_1, \dots, x_k)$ $h = (h_1, \dots, h_k) \in T_x U = \mathbb{R}^k$

Własności pochodnej: 1) $U \subset \mathbb{R}^k$ $V \subset \mathbb{R}^l$ $W \subset \mathbb{R}^m$ otwarte

$f : U \to V$, $g : V \to W$ gładkie to $d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x$

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dr, "g"] & \\ U \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g \circ f"'] & & W \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathbb{R}^l = T_{f(x)} V \arrow[dr, "dg_{f(x)}"] & \\ \mathbb{R}^k = T_x U \arrow[ur, "df_x"] \arrow[rr, "d(g \circ f)_x"'] & & T_{g(f(x))} W = \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

2) $Id : U \to U$ $Id(x) = x$ $dId_x = Id : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$

3) $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ liniowe $dL_x = L$

Stw. $U \subset \mathbb{R}^k$, $V \subset \mathbb{R}^l$ otwarte $f : U \to V$ dyfeomorfizm

Wtedy $k = l$ i $df_x : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ jest przekształceniem liniowym nieosobliwym.

Tw. (o lokalnym dyfeomorfizmie) $U, V \subset \mathbb{R}^k$ otwarte

$f : U \to V$ gładkie oraz $df_x : T_x U \to T_{f(x)} V$ nieosobliwe to $\exists\, U' \subset U$ otwarty $x \in U'$ t. że $f|_{U'} : U' \to f(U')$ jest dyfeomorfizmem

Uwaga! Nawet jeśli $\forall x \in U$ df_x jest nieosobliwe to f nie musi być wzajemnie jednoznaczne na całym U. Przykład to $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\exp(z) = e^z$

$\exp : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\exp(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$

Def. (przestrzeni stycznej rozmaitości gładkiej $M \subset \mathbb{R}^k$)

Niech $g : U \to M \subset \mathbb{R}^k$ parametryzacją otoczenia $g(U)$ punktu $g(u) = x$

$U \subset \mathbb{R}^m$ otwarty $dg_u : T_x U = \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$

Wtedy przestrzeń styczna do M w punkcie x to $T_x M = dg_u(\mathbb{R}^m)$

tw. Powyższa definicja nie zależy od wyboru parametryzacji g

Dowód.: $h : V \to M \subset \mathbb{R}^k$ inna parametryzacja otoczenia $h(V)$ punktu $x = h(v)$

Wtedy $h^{-1} \circ g\,|_{U_1} : U_1 \to V_1$, gdzie $U_1 = g^{-1}(h(V) \cap g(U))$ jest dyfeomorfizmem otoczenia U_1 punktu u na swój obraz V_1 – otoczenie punktu v

$$\begin{tikzcd} & M \subset \mathbb{R}^k & \\ U_1 \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "h^{-1}\circ g"'] & & V_1 \arrow[ul, "h"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathbb{R}^k & \\ \mathbb{R}^m = T_u U_1 \arrow[ur, "dg_u"] \arrow[rr, "\simeq", "d(h^{-1}\circ g)_u"'] & & T_v V_1 = \mathbb{R}^m \arrow[ul, "dg_v"'] \end{tikzcd}$$

$$g = h \circ (h^{-1} \circ g) \qquad dg_u = dh_v \circ d(h^{-1} \circ g)_u$$

$$T_x M = dg_u(T_u U_1) = dh_v\left(d(h^{-1}\circ g)_u(T_u U_1)\right) = dh_v(T_v V_1)$$

Stąd $T_x M = dh_v(T_v V_1) \cong dh_v(\mathbb{R}^m)$ $\square$

Stw. $T_x M$ jest m-wymiarową przestrzenią wektorową

Dowód.: $g^{-1} : g(U) \to U$ przekształcenie gładkie. Niech $F : W \to \mathbb{R}^m$ gładkie $W \subset \mathbb{R}^k$ otwarty

$x \in W$ oraz $g^{-1}|_{W \cap g(U)} = F|_{W \cap g(U)}$ Niech $U_0 = g^{-1}(W \cap g(U))$

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dr, "F"] & \\ U_0 \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, hook, "\text{włożenie } u \mapsto u"'] & & \mathbb{R}^m \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathbb{R}^k \arrow[dr, "dF_x"] & \\ \mathbb{R}^m \arrow[ur, "dg_u"] \arrow[rr, "id_{\mathbb{R}^m}"'] & & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

Stąd rank $dg_x = m$ $\quad T_x M = dg_x(\mathbb{R}^m)$

$\dim T_x M = m$ $\square$

Def. (pochodnej przekształcenia rozmaitości w punkcie)

$M \subset \mathbb{R}^k$, $N \subset \mathbb{R}^l$ rozmaitości gładkie $f: M \to N$ gładkie

Wtedy $x \in M$ $\exists\, W \subset \mathbb{R}^k$ otwarty $x \in W$ oraz $F: W \to \mathbb{R}^l$ gładkie t. że $F|_{W \cap M} = f|_{W \cap M}$

$df_x : T_x M = \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n = T_{f(x)} N$ pochodna f w x (różniczka f, przekształcenie styczne)

jest dane wzorem $df_x(v) = dF_x(v)$ $\forall\, v \in T_x M$

Stw. $dF_x(v) \in T_{f(x)} N$ oraz $df_x(v)$ nie zależy od wyboru F.

Dowód.: Niech $g: U \to M \subset \mathbb{R}^k$ $h: V \to N \subset \mathbb{R}^l$ parametryzacje

otoczeń $g(U)$ punktu x oraz $h(V)$ punktu $y = f(x)$ odpowiednio.

Możemy założyć, że $g(U) \subset W$ i $f(g(U)) \subset h(V)$

Wtedy $h^{-1} \circ f \circ g : U \to V$ gładkie

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "F"] & \mathbb{R}^l \\ U \arrow[u, "g"] \arrow[r, "h^{-1}\circ f \circ g"] & V \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} \mathbb{R}^k \arrow[r, "F"] & \mathbb{R}^l \\ T_u U = \mathbb{R}^m \arrow[u, "dg_u"] \arrow[r, "d(h^{-1}\circ f\circ g)_u"] & \mathbb{R}^n = T_v \mathbb{R}^n \arrow[u, "dh_v"'] \end{tikzcd}$$

$u = g^{-1}(x)$ $\qquad$ $v = h^{-1}(y)$

stąd

$dF(dg_u(\mathbb{R}^m)) \subset dh_v(\mathbb{R}^n)$

$dF(T_x M) \subset T_y N$

$df_x = dF_x = dh_v \circ d(h^{-1} \circ f \circ g)_u \circ (dg_u)^{-1}$. Prawa strona nie zależy od wyboru F.

Stąd $df_x : T_x M \to T_y N$ jest dobrze określone. $\square$

Własności pochodnej przekształcenia między rozmaitościami.

1) $f : M \to N$ $g : N \to P$ gładkie, $x \in M$ $\quad d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x$

2) $Id_M : M \to M$ $\quad Id_M(x) = x \quad \forall x \in M$ $\quad dId_{M\,x} = Id_{T_x M}$

$M \subset N$ $\quad i : M \to N$ $\quad i_M(x) = x \quad \forall x \in M$ $\quad di_{M\,x} = i_{T_x M}$

$i_{T_x M} : T_x M \to T_x N$ $\quad i_{T_x M}(v) = v \quad \forall v \in T_x M \subset T_x N$

Stw. $f : M \to N$ dyfeomorfizm to $df_x : T_x M \to T_{f(x)} N$ jest izomorfizmem liniowym i $\dim M = \dim N$.

Wartości regularne

$f: M \to N$ gładkie i $\dim M = \dim N$

Def. Punkt $x \in M$ jest punktem regularnym przekształcenia f jeśli $df_x : T_x M \to T_x N$ jest przekształceniem nieosobliwym.

Z tw. o lokalnym dyfeomorfiźmie $\exists\, U \ni x$ otoczenie x w M takie, że $f|_U : U \to f(U)$ dyfeomor.

Def.
Punkt $y \in N$ jest wartością regularną przekształcenia f jeśli $f^{-1}(y)$ składa się tylko z punktów regularnych

Def. Punkt $x \in M$ jest punktem krytycznym przekształcenia f jeśli df_x jest przekształceniem osobliwym.

Jeśli x jest punktem krytycznym f to $f(x)$ jest wartością krytyczną przekształcenia f.

$y \in N$ jest wartością krytyczną f jest $\exists\, x \in M$ punkt krytyczny f, taki że $f(x) = y$.

Stw.
Zał. że M jest zwarta, $y \in N$ jest wartością regularną f

Teza $f^{-1}(y)$ jest zbiorem skończonym ($f^{-1}(y)$ może być puste)

Dowód.: $f^{-1}(y)$ jest zbiorem zwartym, bo $f^{-1}(y)$ jest domknięty (przeciwobraz zbioru domkniętego $\{y\}$) $f^{-1}(y) \subset M$ zwarta. $f^{-1}(y)$ jest dyskretny, gdyż f przekształca dyfeomorficznie pewne otoczenie każdego punktu $x \in f^{-1}(y)$ na pewne otoczenie y.

Stąd każdy punkt $x \in f^{-1}(y)$ ma otoczenie U w M t, że $U \cap f^{-1}(y) = \{x\}$

Podzbiór dyskretny i zwarty to zbiór skończony, bo zbiór jest zwarty jeśli z każdego jego pokrycia zbiorami otwartymi można wybrać podpokrycie skończone. $\square$

$f: M \to N$ gładkie, $\dim M = \dim N$, M – zwarta, $y \in N$ wartość regularna f

$\# f^{-1}(y)$ – liczba punktów $x \in M$ takich, że $f(x) = y$

Stw. $\# f^{-1}(y)$ jest funkcją lokalnie stałą zmiennej y (gdzie y jest wartością regularną f)

tzn. $\forall y \in N$ t, że y jest wartością regularną f $\exists V \ni y$ otoczenie y w N t, że

$$\forall y' \in V \quad \# f^{-1}(y') = \# f^{-1}(y)$$

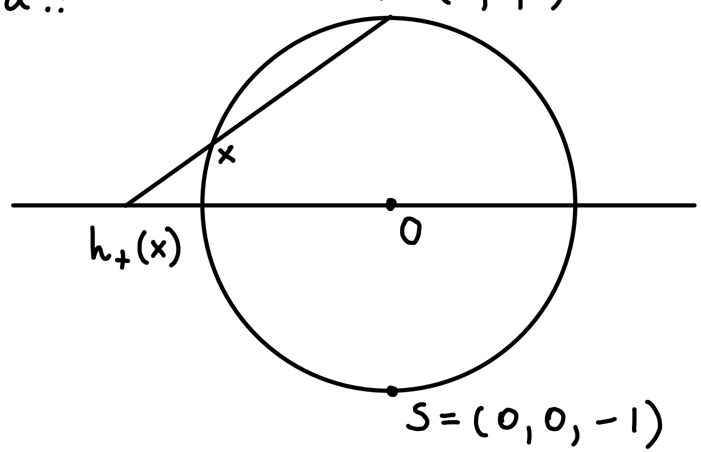
Dowód.: $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$ $\forall i = 1, \dots, k$ $U_i \ni x_i$ otoczenie w M t, że $f|_{U_i}: U_i \to f(U_i)$ dyfeom. i $U_i \cap U_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$

$V = f(U_1) \cap \dots \cap f(U_k) \setminus f(M \setminus (\bigcup_{i=1}^{k} U_i))$. $\forall y' \in V$ $\# f^{-1}(y') = k$. $\square$

Zastosowanie. Podstawowe twierdzenie algebry.

Każdy wielomian zespolony $P(z)$ nie równy tożsamościowo stałej posiada pierwiastek (miejsce zerowe).

Dowód.:



$h_+ : S^2 - N \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3 \qquad \mathbb{R}^2 \times \{0\} = \mathbb{C}$

$f(x) = (h_+^{-1} \circ P \circ h_+)(x) \qquad x \neq (0,0,1)$

$f(0,0,1) = (0,0,1)$

$N + t(x - N) = (0,0,1) + t(x_1, x_2, x_3 - 1)$
$= y \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}$

$$1 + t(x_3 - 1) = 0$$

$$t = \frac{1}{1 - x_3} \qquad |x| = 1$$

$$y = \left(\frac{x_1}{1-x_3} , \frac{x_2}{1-x_3} , 0 \right) \qquad |x| = 1$$

$$y_1 = \frac{x_1}{1-x_3} \qquad y_2 = \frac{x_1}{1-x_3} \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \qquad x_1 = (1-x_3)y_1 \qquad x_2 = (1-x_3)y_2$$

$$(1-x_3)^2 y_1^2 + (1-x_3)^2 y_2^2 + x_3^2 = 1 \qquad x_3 = \frac{-1 + y_1^2 + y_2^2}{1 + y_1^2 + y_2^2}$$

$$h_+(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1-x_3} , \frac{x_2}{1-x_3} , 0 \right) \qquad h_+^{-1}(y_1, y_2) = \left(\frac{2y_1}{1+y_1^2+y_2^2} , \frac{2y_2}{1+y_1^2+y_2^2} , \frac{-1+y_1^2+y_2^2}{1+y_1^2+y_2^2} \right)$$

$$S = (0, 0, -1)$$

$$h_- : S^2 \setminus \{S\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3 \qquad S + t(x - S) = y \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}$$

$$-1 + t(x_3 + 1) = 0 \qquad t = \frac{1}{1+x_3} \qquad |x| = 1 \qquad y = \left(\frac{x_1}{1+x_3} , \frac{x_2}{1+x_3} , 0 \right)$$

$$x_3 = \frac{1 - y_1^2 - y_2^2}{1 + y_1^2 + y_2^2} \qquad x_1 = (1+x_3)y_1 \qquad x_2 = (1+x_3)y_2 \qquad x_1 = \frac{2y_1}{1+y_1^2+y_2^2} \qquad x_2 = \frac{2y_2}{1+y_1^2+y_2^2}$$

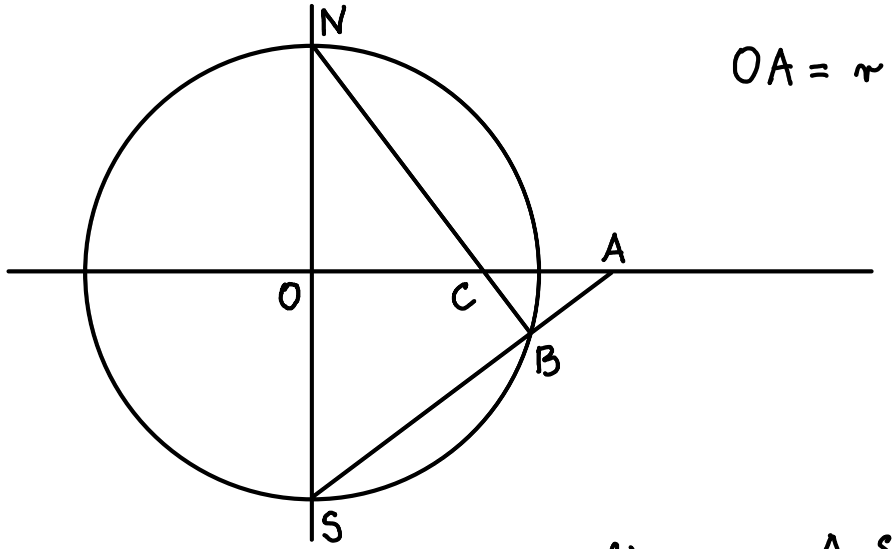
$$h_-(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1+x_3} , \frac{x_2}{1+x_3} , 0 \right) \qquad h_-(y_1, y_2) = \left(\frac{2y_1}{1+y_1^2+y_2^2} , \frac{2y_2}{1+y_1^2+y_2^2} \right)$$

Udowodnimy, że $f: S^2 \to S^2$ $f(x) = (h_+^{-1} \circ P \circ h_+)(x)$ dla $x \neq (0,0,1)$, $f(0,0,1) = (0,0,1)$ jest p. gładkim

W punktach $x \neq (0,0,1)$ f jest gładkie jako złożenie przekształceń gładkich h_+, P, h_+^{-1}

W otoczeniu punktu $N = (0,0,1)$ rozważmy przekształcenie $Q(z) = (h_- \circ f \circ h_-^{-1})(z)$; $Q: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$Q(z) = (h_+ \circ h_-^{-1})^{-1} \circ P \circ (h_+ \circ h_-^{-1})(z)$ $\quad z \neq 0$, $Q(0) = (h_- \circ f \circ h_-^{-1})(0) = h_-(f(0,0,1)) = h_-(0,0,1) = 0$



$OA = r$ $\quad ON = OS = 1$

$\sphericalangle SOA = \sphericalangle NOC = \frac{\pi}{2} = \sphericalangle NBS$ (NS średnica)

z ΔNSB $\quad \sphericalangle ONC = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle OSB$

Stąd $\sphericalangle ONC = \sphericalangle OAS$ $\quad \sphericalangle OSB = \sphericalangle OCN$

czyli $\quad \Delta SOA \sim \Delta NOC$ (są podobne)

Stąd $\quad \frac{OC}{ON} = \frac{OS}{OA}$ $\quad OC = \frac{1}{OA} = \frac{1}{r}$

Punkty z, $h_-^{-1}(z)$, $h_+(h_-^{-1}(z))$, S, N leżą w jednej płaszczyźnie wyznaczonej przez punkty z, S, N. Stąd z i $h_+(h_-^{-1}(z))$ mają ten sam argument φ

$z = re^{i\varphi}$ $\quad h_+(h_-^{-1}(z)) = R \cdot e^{i\varphi}$. Biorąc na rys. $A = z$ i $C = h_+(h_-^{-1}(z))$

otrzymujemy $R = \frac{1}{r}$ $\quad h_+(h_-^{-1}(z)) = \frac{1}{r} e^{i\varphi} = (re^{-i\varphi})^{-1} = \frac{1}{\bar{z}}$

$h_+(h_-^{-1}(z)) = \frac{1}{\bar z}$ $\quad w = \frac{1}{\bar z}$ $\quad z = \frac{1}{\bar w}$ $\quad (h_+ \circ h_-^{-1})^{-1}(w) = \frac{1}{\bar w}$

$$Q(z) = (h_+ \circ h_-^{-1})^{-1} \circ P \circ (h_+(h_-(z)) = (h_+ \circ h_-^{-1})^{-1}(P((\bar z)^{-1})) = \left(\overline{P(\bar z^{-1})}\right)^{-1}$$

$$P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^{n-i} \qquad a_0 \neq 0 \qquad P(\bar z^{-1}) = \sum_{i=0}^{n} a_i((\bar z)^{-1})^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} a_i (\bar z)^{i-n} = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i (\bar z)^i}{\bar z^n}$$

$$Q(z) = \left(\overline{P(\bar z^{-1})}\right)^{-1} = \left(\frac{z^n}{\sum_{i=0}^{n} \bar a_i z^i} \right) = \frac{z^n}{\bar a_0 + \bar a_1 z + \dots + \bar a_n z^n} \quad \text{dla } z \neq 0$$

$Q(0) = 0$ Stąd Q jest p. gładkim także w otoczeniu 0 na $\mathbb{C}$

Stąd $f = h_-^{-1} \circ Q \circ h_-$ jest gładkie w otoczeniu punktu $(0,0,1)$

Przekształcenie f ma conajwyżej skończoną liczbę punktów krytycznych, bo P nie jest lokalnym dyfeomorfizmem tylko w miejscach zerowych $P'(z) = \sum_{j=1}^{n} a_{n-j} z^{j-1}$. Pochodna ma conajwyżej skończoną liczbę miejsc zerowych, bo $P(z)$ nie jest stały. Zbiór wartości regularnych f jest więc sferą bez skończonej liczby punktów czyli jest spójny. Stąd funkcja $\# f^{-1}(y)$ lokalnie stała na tym zbiorze jest stała na nim. $\# f^{-1}(y)$ nie może być równa 0 wszędzie więc jest różne od zera. Stąd $\# f^{-1}(y) \neq 0$ $\forall y \in S^2$, bo jeśli y jest wartością krytyczną to $\exists x \in S^2$ p. kryt. f t, że $f(x) = y$.

Czyli f jest przekształceniem sfery S^2 na siebie. $\forall y \in S^2 \quad f^{-1}(y) \neq \emptyset$

Stąd wielomian $P(z)$ musi posiadać miejsce zerowe, bo musi także być na $\mathbb{C}$, gdzie $P(z) = (h_+ \circ f \circ h_+^{-1})(z)$.