Tw. 1 (o lokalnym dyfeomorfiźmie)

zał. X, Y rozmaitości gładkie $f: X \to Y$ p. gładkie $x \in X$

Teza Jeżeli $df_x : T_x X \to T_{f(x)} Y$ jest izomorfizmem to f jest lokalnym dyfeomorfizmem w pewnym otoczeniu punktu x tzn. $\exists\, U \subset X$ otwarty $x \in U$ $f|_U : U \to f(U)$ dyfeomorfizm.

Przykład. : $f: \mathbb{R} \to S^1$ $f(t) = (\cos t, \sin t)$ $f'(t) = (-\sin t, \cos t)$ $|f'(t)| = 1 \neq 0$

f - lokalny dyfeomorfizm w pewnym otoczeniu dowolnego punktu a nie globalny $f(t) = f(t + 2k\pi)$ $k \in \mathbb{Z}$.

Wniosek. Przy zał. Tw. 1 $\exists$ parametryzację $\Phi: U \to X$, $\Psi: U \to Y$ t, że $0 \in U$

$\Phi(0) = x$ $\Psi(0) = f(x)$ takie, że $(\Psi^{-1} \circ f \circ \Phi)(u_1, \dots, u_n) = (u_1, \dots, u_n)$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \Phi \uparrow & & \uparrow \Psi \\ U & \xrightarrow{Id_U} & U \end{array}$$

$Id_U(u) = u$

Def. $X, \tilde{X}, Y, \tilde{Y}$ rozm. gładkie $f: X \to Y$, $\tilde{f}: \tilde{X} \to \tilde{Y}$ p. gładkie $f, \tilde{f}$ są <u>równoważne</u> jeśli $\exists\, \Phi: \tilde{X} \to X$, $\Psi: \tilde{Y} \to Y$ dyfeomorfizmy takie, że $\tilde{f} = \Psi^{-1} \circ f \circ \Phi$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \Phi \uparrow & & \uparrow \Psi \\ \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{Y} \end{array}$$

$\Phi: X \to \tilde{X}$ dyfeomorfizm $\Rightarrow$ $\dim X = \dim \tilde{X}$

<u>Def</u>. X, Y rozm. gładkie i $\dim X < \dim Y$ oraz $f: X \to Y$ p. gładkie

f jest <u>immersją</u> w punkcie $x \in X$ jeżeli $df_x : T_x X \to T_{f(x)} Y$ jest injekcją

Przykład. $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ $k \leq l$ $f(a_1, \dots, a_k) = (a_1, \dots, a_k, 0, \dots, 0)$ immersja

Tw. (o lokalnej immersji)

X, Y rozm. gładkie, $f: X \to Y$ p. gładkie. Jeżeli f jest immersją w x wtedy istnieją układy współrzędnych (parametryzacje $\Phi: U \to X$, $\Psi: V \to Y$ takie że $\Phi(0) = x$, $\Psi(0) = f(x)$)

$$\Psi^{-1} \circ f \circ \Phi (x_1, \dots, x_k) = \underbrace{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)}_{l} \qquad \dim X = k \quad \dim Y = l$$

Dowód.:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \tilde{\Phi} \uparrow & & \uparrow \tilde{\Psi} \\ \mathbb{R}^k \supset U & \xrightarrow{g} & V \subset \mathbb{R}^l \\ \ni 0 & & \ni 0 \end{array} \qquad \tilde{\Phi}(0) = x \quad \tilde{\Psi}(0) = f(x)$$

$dg_0 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ jest injekcją. Zamieniając bazę w $\mathbb{R}^l$ otrzymujemy, że macierz dg_0 ma postać $\begin{bmatrix} I_k \\ 0 \end{bmatrix}$

Zdefiniujmy przekształcenie $G: U \times \mathbb{R}^{l-k} \to \mathbb{R}^l$ wzorem $G(x, z) = g(x) + (0, z)$

Wtedy $dG_0 = I_l$. Z tw. o lokalnym dyfeomorfizmie G jest lokalnym dyfeomorfizmem w otoczeniu $(0, 0) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{l-k} = \mathbb{R}^l$. Z definicji G otrzymujemy że $G(x, 0) = g(x)$.

Wtedy $\Psi \circ G$ lokalne parametryzacje w Y w otoczeniu $\Psi(G(0)) = \Psi(0) = f(x)$

i mamy

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ U \arrow[u, "\Phi"] \arrow[r] & V \arrow[u, "\Psi \circ G"'] \\ x \arrow[r, mapsto] & (x,0) \end{tikzcd} \qquad \blacksquare$$

Def. X, Y rozm. gładkie $\dim X \geq \dim Y$ $f: X \to Y$ p. gładkie

f jest submersją w $x \in X$ jeśli $df_x : X \to Y$ jest surjekcją.

Przykład $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ $k \geq l$ $f(a_1, \dots, a_k) = (a_1, \dots, a_l)$ jest submersją $\forall a \in \mathbb{R}^k$.

Tw. (o lokalnej submersji) Jeżeli $f: X \to Y$ jest submersją w x to istnieją parametryzacje

$\Phi: U \to X$, $\Psi: V \to Y$ $\varphi(0) = x$ $\Psi(0) = f(x)$ takie, że $(\Psi^{-1} \circ f \circ \Phi)(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_l)$

Dowód.:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ U \arrow[u, "\tilde{\Phi}"] \arrow[r, "g"] & V \arrow[u, "\tilde{\Psi}"'] \end{tikzcd}$$

$\tilde{\Phi}(0) = x$ $\tilde{\Psi}(0) = f(x)$

$dg_0 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ jest surjekcją. Przez zamianę bazy w $\mathbb{R}^k$ możemy otrzymać, że macierz $dg_0 = [I_l \mid 0]$

$G(u) \overset{def}{=} (g(u), u_{l+1}, \dots, u_k)$ $u = (u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_l)$

$dG_0 = I_k$ G - jest lok. dyfeomorfizmem G^{-1} odwrotny dyfeomorfizm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ U' \arrow[u, "\tilde{\Phi}\circ G^{-1}"] \arrow[r] & V \arrow[u, "\tilde{\Psi}"'] \end{tikzcd} \qquad \blacksquare$$

$$(x_1,\dots,x_n) \longmapsto (x_1,\dots,x_k)$$

(Tw. o przeciwobrazie wartości regularnej)

Wniosek.1 Jeżeli y jest wartością regularną $f: X \to Y$ to $f^{-1}(y)$ jest podrozmaitością X i $\dim f^{-1}(y) = \dim X - \dim Y$.

$$GL(n) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0 \} \text{ – grupa liniowa} \qquad G(n) \subset \mathbb{R}^{n^2} \text{ podzbiór otwarty}$$

$$O(n) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A \cdot A^T = I_n \} \text{ – grupa ortogonalna}$$

$$f(A) = AA^T \qquad (AA^T)^T = AA^T \qquad S(n) = \{ A \in GL(n) \mid A^T = A \} \simeq \mathbb{R}^{\frac{n^2-n}{2}+n} \text{ bo } A \in S(n) \Leftrightarrow A_{ij} = A_{ji} \quad i,j = 1,\dots,n$$

$$f: GL(n) \to S(n) \qquad O(n) = f^{-1}(I_n)$$

$$df_A(B) = \lim_{s\to 0} \frac{f(A+sB)-f(A)}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{(A+sB)(A^T+sB^T) - AA^T}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{s(BA^T + AB^T + sBB^T)}{s} = BA^T + AB^T$$

$$T_A GL(n) = M_n(\mathbb{R}) \qquad B \in M_n(\mathbb{R})$$

$$A_t^T = A_t \qquad \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} A_t^T = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} A_t \qquad \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} A_t \right)^T = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} A_t \qquad \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} A_t \in S(n)$$

$$T_{f(A)} S(n) = S(n)$$

$$C \in S(n) \qquad BA^T + AB^T = C = \tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}C^T \qquad BA^T = \tfrac{1}{2}C \qquad A^TA = I_n \qquad B = \tfrac{1}{2}CA$$

$df_A(B) = (\frac{1}{2}CA)A^T + A(\frac{1}{2}CA)^T = \frac{1}{2}C\,AA^T + \frac{1}{2}(AA^T)C^T = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C^T = C$

f jest submersją $\forall A \in O(n)$ $\quad f^{-1}(I_n) = O(n)$ $\quad I_n$ wartość regularna f

$O(n)$ jest podrozmaitością $GL(n)$ wymiaru $\dim O(n) = \dim GL(n) - \dim S(n) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

$O(n)$ jest również grupą z działaniem mnożenia macierzy $O(n) \times O(n) \ni (A,B) \mapsto A \cdot B \in O(n)$
Element odwrotny względem tego mnożenia to macierz odwrotna. Operacja brania elementu odwrotnego to $O(n) \ni A \mapsto A^{-1} \in O(n)$ $\quad (A^{-1} = A^T$ w $O(n))$
Przekształcenia $O(n) \times O(n) \ni (A,B) \mapsto A \cdot B \in O(n)$, $\quad O(n) \ni A \mapsto A^{-1} \in O(n)$ są gładkie
Grupy ze strukturą rozmaitości gładkiej w których te operacje są gładkie nazywa się grupami Liego
Przykłady grup Liego: $\quad GL(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$, $O(n)$, $SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$
$SL(n) = \{A \in GL(n) \mid \det A = 1\}$, Niech $J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$ $\quad Sym(2n) = \{A \in M_{2n}(\mathbb{R}) \mid A^T J A = J\}$

$A_t \in O(n) \quad A_0 = Id \quad A_t A_t^T = I_n \; / \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \quad \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} A_t\right) \cdot A_0^T + A_0 \cdot \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} A_t\right)^T = 0$

$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} A_t + \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} A_t\right)^T = 0 \qquad B + B^T = 0 \qquad B$ – macierz antysymetryczna

$o(n) = T_{Id}\,O(n) = \{B \in M_n(\mathbb{R}) \mid B + B^T = 0\}$ – algebra Liego grupy Liego $O(n)$
$B, C \in o(n) \quad [B,C] = B \cdot C - C \cdot B \in o(n) \quad BC - CB + (BC-CB)^T = BC - CB + (-C)(-B) - (-B)(-C) = 0 \quad B^T = -B, C^T = -C$

X – rozm. gł.

Stw. $g_1,\dots,g_\ell \in C^\infty(X,\mathbb{R})$ Jeżeli $dg_{1x},\dots,dg_{\ell x} \in (T_xX)^*$ są l. niezależne dla każdego $x \in Z = \{z \in X \mid g_1(z) = \dots = g_\ell(z) = 0\}$ to Z jest podrozmaitością X wymiaru $\dim X - \ell$.

Dowód. Wniosek z Wniosku 1 (o przeciwobrazie wartości regularnej) $g = (g_1,\dots,g_\ell) : X \to \mathbb{R}^\ell$
$0 \in \mathbb{R}^\ell$ jest wartością regularną g oraz $Z = g^{-1}(0)$.

Stw. Jeżeli y jest wartością regularną p. gładkiego $f : X \to Y$ to $f^{-1}(y)$ można przedstawić jako przecięcie niezależnych funkcji gładkich $g_i : X \to \mathbb{R}$ $i = 1,\dots,\ell$,

Dowód.: W – otoczenie y dyfeomorficzne z otoczeniem 0 w $\mathbb{R}^\ell$ $h : W \to \mathbb{R}^\ell$ dyfeom.

$h(y) = 0$. $g = h \circ f : X \to \mathbb{R}^\ell$ $g = (g_1,\dots,g_\ell)$ $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid g_1(x) = \dots = g_\ell(x) = 0\}$.

$\square$

Stw. 3 Niech Z będzie podrozm. rozmaitości X i $\operatorname{codim} Z = \dim X - \dim Z = \ell$

Wtedy $\forall x \in Z$ $\exists W \subset X$ otwarty $x \in W$ $\exists g_1,\dots,g_\ell : W \to \mathbb{R}$ gładkie i niezależne na $W \cap Z$ takie, że $W \cap Z = \{x \in W \mid g_1(x) = \dots = g_\ell(x) = 0\}$.

Dowód.: Wniosek z Tw. o lokalnej immersji dla immersji $i : Z \hookrightarrow W$. $\square$

Stw. $f : X \to Y$ p. gładkie, $y \in Y$ wartość regularna $Z = f^{-1}(y)$

Wtedy jądro p. liniowego $df_x : T_xX \to T_yY$ $\forall x \in Z$ jest równe T_xZ.

Dowód.: $f|_Z \equiv y \Rightarrow df_x(T_xZ) = 0$ $\forall x \in Z$ y – wartość regularna więc $df_x : T_xX \to T_yY$ jest surjekcją $\forall x \in Z$

$\dim \ker df_x = \dim T_xX - \dim_y Y = \dim X - \dim Y = \dim Z$ i $T_xZ \subset \ker df_x$

Stąd $T_xZ = \ker df_x$ $\forall x \in Z$. $\square$

Transwersalność

X, Y - rozm. gł. $\quad f: X \to Y$ p. gładkie $\quad Z \subset Y$ podrozm. gł.

f jest transwersalne do Z jeżeli $\forall\, x \in f^{-1}(Z) \quad df_x(T_x X) + T_{f(x)} Z = T_{f(x)} Y$

oznaczenie $f \pitchfork Z$

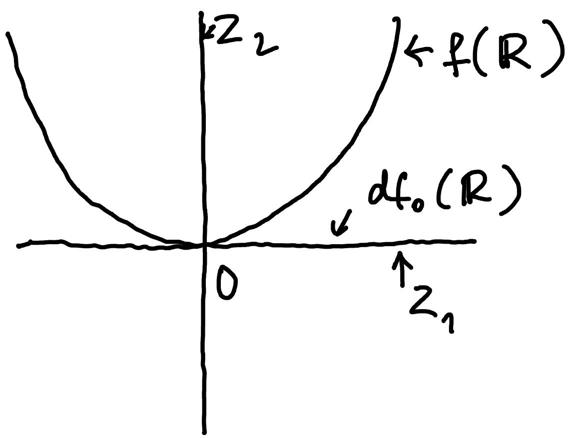
Przykład. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \quad f(t) = (t, t^2) \quad Z_1 = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \quad Z_2 = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$

$df_t = \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \end{bmatrix} \quad f^{-1}(Z_1) = \{0\} \quad f^{-1}(Z_2) = \{0\} \quad df_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad df_0(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \times \{0\}$

$T_0 Z_1 = Z_1 = \mathbb{R} \times \{0\} \qquad T_0 Z_2 = Z_2 = \{0\} \times \mathbb{R}$

$df_0(\mathbb{R}) + T_0 Z_1 = \mathbb{R} \times \{0\} + \mathbb{R} \times \{0\} = \mathbb{R} \times \{0\} \neq \mathbb{R}^2$ $\quad f$ nie jest transwersalne do Z_1 $\quad f \not\pitchfork Z_1$

$df_0(\mathbb{R}) + T_0 Z_2 = \mathbb{R} \times \{0\} + \{0\} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = T_0 \mathbb{R}^2 \qquad f \pitchfork Z_2$



Tw. Jeżeli p. gładkie $f: X \to Y$ jest transwersalne do podrozmaitości $Z \subset Y$ to $f^{-1}(Z)$ jest podrozmaitością X i $\dim f^{-1}(Z) = \operatorname{codim} Z$.

Dowód.: $x \in f^{-1}(Z)$ $\quad y = f(x) \in Z$ $\quad \exists\, W \subset Y$ otwarty $y \in W$ $\exists\, g_1, \ldots, g_l \in C^\infty(W, \mathbb{R})$

(*) niezależne (tzn. $d_{\tilde{y}} g_1, \ldots, d_{\tilde{y}} g_l \in (T_{\tilde{y}} Y)^*$ l. niezależne $\forall\, \tilde{y} \in Z \cap W$) t, że

$Z \cap W = \{ w \in W \mid g_1(w) = \ldots = g_l(w) = 0 \}$ (ne podst. Stw. 3)

$f^{-1}(Z)$ w otoczeniu x t, że $f(x) = y$ to $f^{-1}(Z \cap W) = \{ \tilde{x} \in X \mid (g_1 \circ f)(\tilde{x}) = \ldots = (g_l \circ f)(\tilde{x}) = 0 \}$

$g \overset{\text{def}}{=} (g_1, \ldots, g_l) : W \to \mathbb{R}^l$ jest submersją z (*). Wtedy $0 \in \mathbb{R}^l$ jest wartością regularną $g \circ f$ i $(g \circ f)^{-1}(0) = f^{-1}(Z \cap W)$ jest rozm. gładką kowymiaru l. $\square$

Przykłady

1) $Z = \{y\}$ $\quad f \pitchfork \{y\} \Leftrightarrow y$ jest wartością regularną f

2) $Z, X \subset Y$ podrozmaitości rozm. Y $\quad f = i : X \hookrightarrow Y$ $\quad i(x) = x$

$di_x(T_x X) = T_x X$ $\quad i \pitchfork Z \Leftrightarrow \forall_{x \in X \cap Z}\ T_x X + T_x Z = T_x Y$

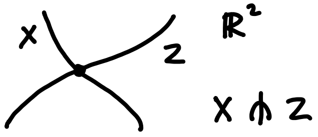
$i^{-1}(Z) = X \cap Z$ jest podrozm. codim Z w X $\quad \operatorname{codim} i^{-1}(X) = \operatorname{codim} Z$ $\quad \dim X - \dim \underset{\substack{\parallel \\ X \cap Z}}{i^{-1}(X)} = \operatorname{codim} Z$

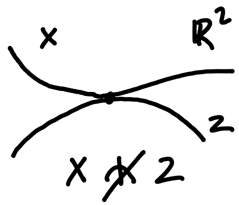
$\dim Y - \operatorname{codim} X - \dim(X \cap Z) = \operatorname{codim} X$ $\qquad \operatorname{codim}(X \cap Z) = \operatorname{codim} X + \operatorname{codim} Z$

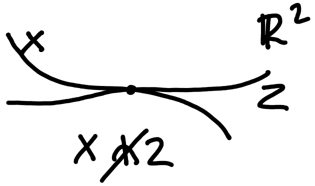
Stw. X, Z podrozm. Y. Jeżeli X i Z są transwersalne tzn. $\forall_{x \in X \cap Z}\; T_x X + T_x Z = T_x Y$ to $X \cap Z$ jest podrozm. $\operatorname{codim}(X \cap Z) = \operatorname{codim} X + \operatorname{codim} Z$.

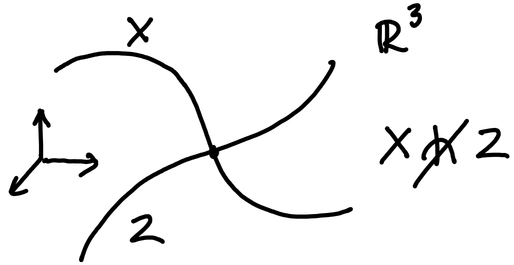
Dowód: W otoczeniu $x \in X \cap Z$ X jest opisane jako zbiór zer $k = \operatorname{codim} X$ funkcji, Z jest opisane jako zbiór zer $l = \operatorname{codim} Z$ funkcji. Wtedy przecięcie $X \cap Z$ jest opisane lokalnie jako zbiór zer $k + l$ funkcji. $\square$

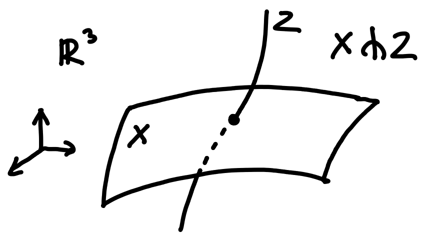
Przykłady transwersalności i nietranswersalności:

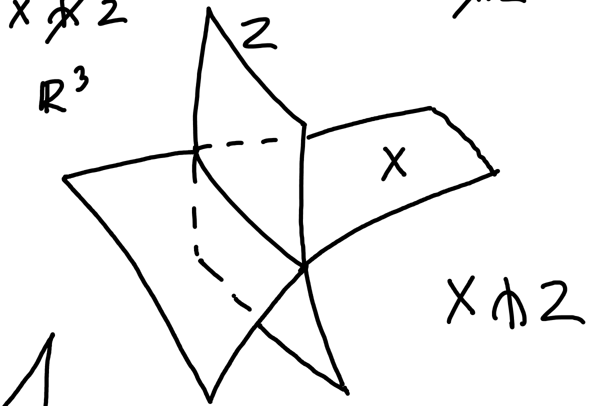
1) 

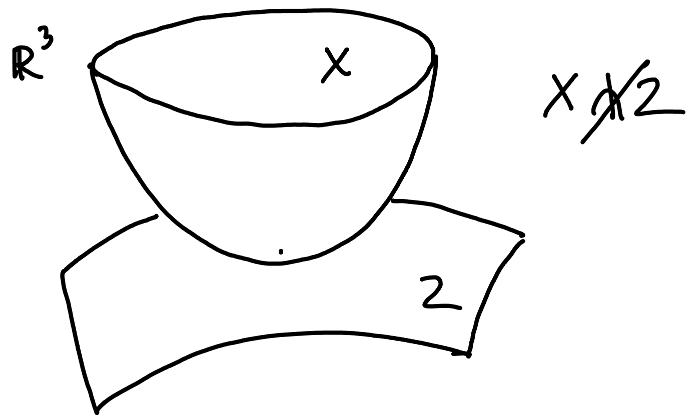
2) 

3) 

4) 

5) 

6) 

7) 

8)