Twierdzenie Sarda.

$A \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem miary zero jeśli $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \{S_i\}_{i=1,2,3,\dots}$ – przeliczalne pokrycie A zbiorami $S_i = \bigtimes_{j=1}^{n} (a_{ij}, b_{ij})$ gdzie $a_{ij} < b_{ij}$ dla $j = 1, \dots, n$ $i = 1, 2, 3, \dots$ takie, że $\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{vol}(S_i) < \varepsilon$ i $\operatorname{vol}(S_i) = \prod_{j=1}^{n} (b_{ij} - a_{ij})$

$c \in \mathbb{R}^k$ $k < n$ $V_c = \{c\} \times \mathbb{R}^{n-k}$

Tw. Fubiniego.

wł. $A \subset \mathbb{R}^n$ domknięty. Jeżeli $\forall c \in \mathbb{R}^k$ $A \cap V_c$ jest zbiorem miary zero w $\mathbb{R}^{n-k} \simeq \{c\} \times \mathbb{R}^{n-k}$ to A jest zbiorem miary zero.

Tw. $U \subset \mathbb{R}^n$ otwarty, $f : U \to \mathbb{R}^n$ gładkie

Jeżeli A jest zbiorem miary zero to $f(A)$ jest zbiorem miary zero.

Dowód. $A \subset \mathbb{R}^n = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}^n} \bar{K}^n(q, \varepsilon)$ $\bar{K}^n(q, \varepsilon) = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x - q| \leq \varepsilon \}$

$\bar{K}(q, \varepsilon)$ – zbiór zwarty (domknięty i ograniczony)

A jest pokryte przez przeliczalną rodzinę zbiorów zwartych.

Stąd możemy zał., że $\bar{A}$ jest zwarty i $\bar{A} \subset U$

$A \subset W$ otwarty i $\bar{W}$ – zwarty i $\bar{W} \subset U$

$\overline{W}$ jest zwarty $\Rightarrow \exists M > 0 \quad |f(x)-f(y)| < M|x-y| \quad \forall x,y \in \overline{W}$ (z tw. o wartości średniej

bo $|f(x)-f(y)| \leq \sup\limits_{t\in[0,1]} |f'(y+t(x-y))|\,|x-y| \leq M|x-y|$

$\overline{W} \ni z \longmapsto |f'(z)|$ – ciągłe na zwartym więc ograniczone $|f'(z)| \leq M \ \forall z \in \overline{W}$

$\Rightarrow \exists M' > 0 \quad \forall S'$ – kostka w W $\quad f(S) \subset S' \quad vol(S') \leq M' vol(S)$

Jeśli $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} S_i \quad S_i \subset W \quad \sum\limits_{i=1}^{\infty} vol(S_i) < \varepsilon$ (bo A jest zbiorem miary zero)

to $f(A) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} S_i' \quad \sum\limits_{i=1}^{\infty} vol(S_i') < M' \cdot \varepsilon \quad \Rightarrow f(A)$ jest zbiorem miary zero. $\square$

Wniosek. zał. $U \subset \mathbb{R}^n$ otwarty $\quad f : U \to \mathbb{R}^m$ p. gładkie

Teza Jeżeli $m > n \Rightarrow f(U)$ jest zbiorem miary zero.

Dowód.: $\quad U \subset \mathbb{R}^n \quad U \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} = \mathbb{R}^m \quad \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^m$ jest zbiorem miary zero w $\mathbb{R}^m$

V – otoczenie 0 w $\mathbb{R}^{m-n} \quad F: U \times V \ni (x,z) \mapsto f(x) \in \mathbb{R}^m$ gładkie p. oraz $F(U \times \{0\}) = f(U)$

$U \times \{0\}$ jest miary zero zbiorem oraz F – gładka stąd na podst. pop. tw.

$F(U \times \{0\}) = f(U)$ jest zbiorem miary zero. $\square$

Def. Niech X - k-wym rozmaitość gładka $A \subset X$

A jest zbiorem miary zero w X jeżeli $\forall$ parametryzacji $f: U \to X$ $f^{-1}(A)$ jest zbiorem miary zero w $\mathbb{R}^k$.

X, Y rozmaitości gładkie $f: X \to Y$ p. gładkie ($\dim X$ i $\dim Y$ mogą być różne)

Punkt $x \in X$ jest punktem krytycznym f jeżeli $\operatorname{rank} df_x < \dim Y$

Punkt $y \in Y$ jest wartością krytyczną f jeżeli $\exists\, x \in X$ x jest p. krytycznym f i $f(x)=y$.

Jeżeli $x \in X$ nie jest p. krytycznym f to jest punktem regularnym.

Jeżeli $y \in Y$ nie jest wartością krytyczną f to jest wartością regularną.

Tw. Sarda. zał. X, Y rozm. gładkie $f: X \to Y$ p. gładkie $C \subset X$ zbiór p. krytycznych f

Teza. Zbiór wartości krytycznych $f(C)$ jest zbiorem miary zero.

Dowód.:

Mamy przeliczalne pokrycia otwarte $\{U_i\}_{i=1,2,\dots}$ rozm. X oraz $\{V_i\}_{i=1,2,\dots}$ rozm. Y $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i = X$ $\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i = Y$

takie, że $\forall\, i=1,2$ $f(U_i) \subset V_i$.

Stąd wystarczy udowodnić

Tw. $U \subset \mathbb{R}^n$ otwarty $f: U \to \mathbb{R}^p$ p. gładkie. C zbiór p. krytycznych f to $f(C)$ jest zbiorem miary zero w $\mathbb{R}^p$.

Dowód. tw. indukcją po n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ $(p = 1, 2, \ldots)$

Dla $n = 0$ tw. jest prawdziwe $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ $f : \{0\} \to \mathbb{R}^p$ $f(\{0\})$ jest zbiorem miary zero

zał. że tw. jest prawdziwe dla $k \leq n-1$ i dowodzimy dla $k = n$ (krok indukcyjny)

$C \supset C_1 \supset C_2 \supset \ldots$ gdzie $C_i = \{ x \in U \mid \frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_k}}(x) = 0 \quad j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, n\} \quad k \in \{1, \ldots, i\} \}$

C_i są podzbiorami domkniętymi zbioru C.

Lemat 1. $f(C \setminus C_1)$ jest zbiorem miary zero.

Dowód.: $x \in C \setminus C_1$ $x \notin C_1$ $\Rightarrow$ $\exists j, k$ $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x) \neq 0$. Niech $j = k = 1$ (dla uproszczenia zapisu)

czyli $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) \neq 0$. Rozważmy przekszt. $h : U \to \mathbb{R}^n$ $h(x) = (f_1(x), x_2, \ldots, x_n)$

dh_x jest p. nieosobliwym. Stąd z tw. o lokalnym dyfeomorfizmie $\exists V$ otoczenie x w $\mathbb{R}^n$

takie, że $h|_V : V \to h(V)$ dyfeomorfizm. Niech $V' = h(V)$ (otwarty w $\mathbb{R}^n$)

Niech $g : V' \to \mathbb{R}^p$ $g = f \circ h^{-1}$ $f(C \cap V) = (f|_V)(C)$ jest taki sam jak zbiór wartości

krytycznych g. $g(t, x_2, \ldots, x_n) \subset \{t\} \times \mathbb{R}^{p-1}$ $\forall (t, x_2, \ldots, x_n) \in V'$

bo $g(t, x_2, \ldots, x_n) = f(h^{-1}(t, x_2, \ldots, x_n)) = (f_1 \circ h^{-1}(t, x_2, \ldots, x_n), f_2 \circ h^{-1}(t, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_p \circ h^{-1}(t, x_2, \ldots, x_n))$

$f_1 \circ h^{-1}(t, x_2, \ldots, x_n) = h_1 \circ h^{-1}(t, x_2, \ldots, x_n) = t$ bo $h_1(x) = f_1(x)$

$$\forall t \qquad g^t = g|_{(\{t\}\times\mathbb{R}^{n-1})\cap V'} : (\{t\}\times\mathbb{R}^{n-1})\cap V' \to \{t\}\times\mathbb{R}^{p-1}$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{(t,\tilde{x})} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \ \dots \ 0 \\ \hline * & \frac{\partial g^t}{\partial \tilde{x}}\Big|_{\tilde{x}} \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} x = (x_1,\dots,x_n) \\ \tilde{x} = (x_2,\dots,x_n) \end{array}$$

Punkt $(t,\tilde{x})$ jest punktem krytycznym $g \iff \tilde{x}$ jest punktem krytycznym g^t

$(\{t\}\times\mathbb{R}^{n-1})\cap V'$ można utożsamiać z podzbiorem otwartym $\mathbb{R}^{n-1}$

$V'_t = \{\tilde{x}\in\mathbb{R}^{n-1} \mid (t,\tilde{x})\in V'\} \subset \mathbb{R}^{n-1} \qquad \tilde{g}^t : V'_t \to \mathbb{R}^{p-1} \qquad \tilde{g}^t(\tilde{x}) = \pi(g^t(\tilde{x}))$

$$\pi(t,y_2,\dots,y_p) = (y_2,\dots,y_p)$$

Stąd z zał. ind. zbiór wartości krytycznych $\tilde{g}^t$ jest zbiorem miary zero w $\mathbb{R}^{p-1} \simeq \{t\}\times\mathbb{R}^{p-1}$.

Zbiór wartości krytycznych g nie musi być domknięty. Ale zbiór punktów krytycznych jest domknięty w dziedzinie g. Ponieważ dziedzina g jest przeliczalną sumą zbiorów zwartych również zbiór punktów krytycznych jako jej podzbiór domknięty też jest przeliczalną rodziną zbiorów zwartych oraz w konsekwencji jego obraz czyli zbiór wartości krytycznych jest przeliczalną rodziną zbiorów zwartych. Możemy więc zastosować tw. Fubiniego. Z tw. Fubiniego zbiór wartości krytycznych g jest zb. miary zero.

Stąd dla $\forall x \in C \setminus C_1$ $\exists V \ni x$ otoczenie takie że $(f|_V)(C)$ jest zb. miary zero. Stąd wynika, że $f(C \setminus C_1)$ jest zbiorem miary zero. Koniec dowodu Lematu 1 $\square$

Lemat 2. $f(C_k \setminus C_{k+1})$ jest zbiorem miary zero $\forall k \geq 1$.

Dowód.: Podobny do poprzedniego.

$x \in C_k \setminus C_{k+1} \Rightarrow$ pewne pochodne cząstkowe rzędu $k+1$ przekształcenie f w x nie znika.

Niech $\dfrac{\partial^{k+1} f_r}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{k+1}}}(x) \neq 0$ Niech $w = \dfrac{\partial^k f_r}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_{k+1}}}$. Stąd $\dfrac{\partial w}{\partial x_{i_1}}(x) \neq 0$. Dla uproszczenia zapisu

niech $i_1 = 1$. $h: U \to \mathbb{R}^n$ $h(x) := (w(x), x_2, \dots, x_n)$ – dyfeomorfizm lokalny $h|_V : V \to h(V) = V'$

$h(C_k \cap V) \subset \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ $g := f \circ h^{-1} : V' \to \mathbb{R}^p$ $\bar{g} = g|_{(\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}) \cap V'}$

Na podstawie zał. ind. zbiór wart. krytycznych $\bar{g}$ jest miary zero w $\mathbb{R}^p$. Każdy punkt zbioru $h(C_k \cap V)$ jest p. krytycznym $\bar{g}$, gdyż wszystkie pochodne rzędu $\leq k$ znikają.

Zbiór $\bar{g}h(C_k \cap V) = f(C_k \cap V)$ jest więc zbiorem miary zero. Ponieważ zbiór $C_k \setminus C_{k+1}$ można pokryć przeliczalną ilością takich zbiorów V wynika, że $f(C_k \setminus C_{k+1})$ jest zb. miary zero.

Lemat 3. $\forall\, k > \frac{n}{p} - 1$ $\quad f(C_k)$ jest zb. miary zero.

Dowód.: $S \subset U$ kostka o bokach długości δ. Udowodnimy że $f(C_k \cap S)$ jest zb. miary zero dla $k > \frac{n}{p} - 1$. Ponieważ C_k można pokryć przeliczalną ilością takich kostek to dowiedzie, że $f(C_k)$ jest zb. miary zero.

Z Tw. Taylora, zwartości S i def. C_k otrzymujemy

$$f(x+h) = f(x) + R(x,h) \qquad |R(x,h)| < a|h|^{k+1} \; \forall\, x \in C_k \cap S, \; x+h \in S$$

Podzielmy S na r^n kostek o bokach o długości $\frac{\delta}{r}$. Niech S_1 będzie kostką t, że $x \in S_1$ $(x \in C_k)$ $\quad x+h \in S_1 \quad |h| < \sqrt{n}\,\frac{\delta}{r}$ (średnica n wym. kostki o boku a to $\sqrt{n}\,a$)

Stąd $f(S_1)$ jest zawarty w kostce o boku $\frac{b}{r^{k+1}}$ i środku $f(x)$ gdzie $b = 2a(\sqrt{n}\,\delta)^{k+1}$

Stąd $f(C_k \cap S)$ jest zawarty w sumie conajwyżej r^n kostek o objętości całkowitej nie większej niż $\quad vol \leq r^n \left(\frac{b}{r^{k+1}}\right)^p = b^p r^{n-(k+1)p}$ jeśli $k+1 > \frac{n}{p}$ to $vol \to 0$ dla $r \to \infty$. Stąd $f(C_k \cap S)$ jest zb. miary zero $\square$