Homotopia i Stabilność

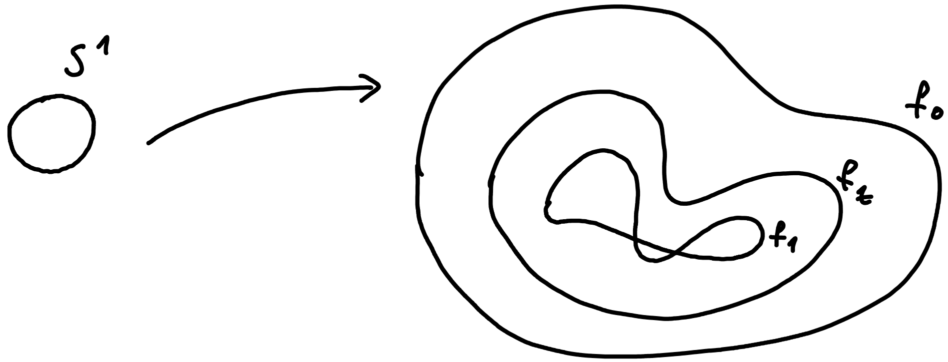
X, Y rozm. gładkie $\quad f_0 : X \to Y \quad f_1 : X \to Y$ p. gładkie

Def. f_0, f_1 są (gładko) homotopijne jeżeli $\exists : F : X \times [0,1] \to Y$ p. gładkie takie, że $F(x,0) = f_0$ i $F(x,1) = f_1$

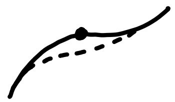
F to (gładka) homotopia między f_0 i f_1

Jest to relacja równoważności na zbiorze p. gładkich $X \to Y$. Klasa abstrakcji tej relacji to klasa homotopii

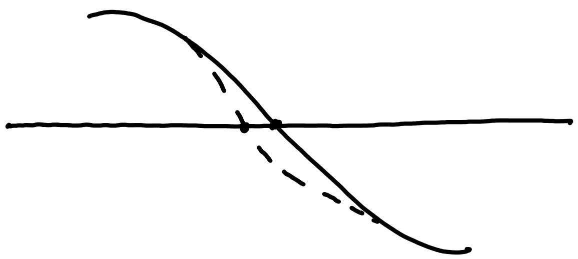
$f_t(x) = F(x,t) \qquad f_t : X \to Y$



Def. Własność p. gładkiego jest stabilna jeżeli $\forall f_0 : X \to Y$ gładkiego mającego tę własność i $\forall f_t : X \to Y$ homotopii f_0 $\exists \varepsilon > 0$ t, że $\forall t \in [0, \varepsilon)$ $f_t : X \to Y$ też ma tę własność.

Przykład.: 1) Przechodzenie przez punkt krzywej w $\mathbb{R}^2$  nie jest stabilne

2) Styczność do prostej  nie jest stabilne

3)  Przecięcie transwersalne prostej i krzywej w $\mathbb{R}^2$ jest stabilne

Tw. o stabilności

Następujące klasy p. gładkich ze zwartej rozmaitości X w rozmaitości Y są stabilne:

a) lokalne dyfeomorfizmy

b) immersje

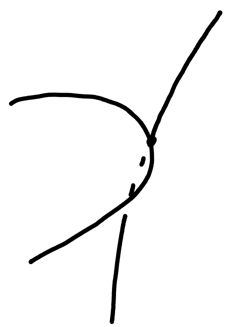
c) submersje

d) p. gładkie transwersalne do wybranej dowolnej podrozmaitości gł. $Z \subset Y$

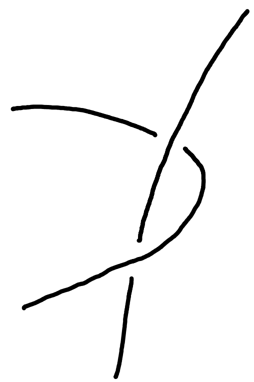
e) zanurzenia

f) dyfeomorfizmy

Przykład Krzywe w $\mathbb{R}^3$ nigdy nie przecinają się transwersalnie



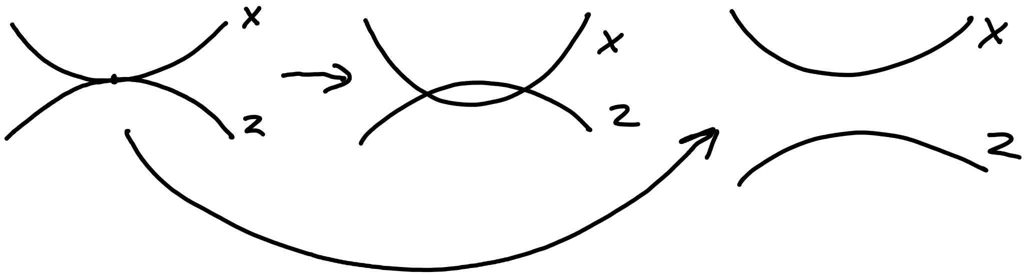
Przecinanie się krzywych w $\mathbb{R}^3$ nie jest stabilne.



Jeżeli $\dim X + \dim Z < \dim Y$

to $f: X \to Y$ nie przecina stabilnie Z.

Przecięcia nietranswersalne nie są stabilne

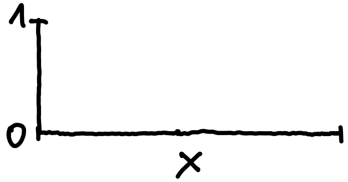


Dowód tw. o stabilności

Dowód. (a) dyfeomorfizmy lokalne wynika z (b) immersje (dyfeomorfizmy lokalne są immersjami $X \to Y$ dla $\dim X = \dim Y$.

(b) immersje

$f_t : X \to Y$ homotopia immersji $f_0 : X \to Y$



X zwarty $\quad U$ otwarty w $X \times [0,1]$ t, że $X \times \{0\} \subset U \quad X \times \{0\}$ zwarty

$x \in X \quad \exists\, V_x$ otwarty w $X \quad x \in V_x \quad \exists\, \varepsilon_x > 0$ t, że $V_x \times [0, \varepsilon_x) \subset U$

$X \times \{0\} \subset \bigcup\limits_{x \in X} V_x \times [0, \varepsilon_x) \subset U$ czyli $\{V_x \times [0, \varepsilon_x),\ x \in X\}$ pokrycie otwarte $X \times \{0\}$ $(\subset U)$

$X \times \{0\}$ zwarty $\Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{N} V_{x_i} \times [0, \varepsilon_i) \supset X \times \{0\}$ Niech $\varepsilon = \min\{\varepsilon_i \mid i = 1, \dots, N\}$

$X \times [0, \varepsilon) \subset U$

Stąd wystarczy pokazać, że $\forall x_0 \in X$ istnieje otoczenie U w $X \times [0,1]$ punktu $(x_0, 0)$ t, że $\forall (x,t) \in U$ $(df_t)_x$ jest injekcją.

To stwierdzenie lokalne, więc można to pokazać we współrzędnych czyli możemy założyć, że X jest podzbiorem otwartym w $\mathbb{R}^k$ i Y jest podzb. otwartym w $\mathbb{R}^\ell$.

$(df_0)_{x_0}$ jest injekcją (z def. immersji)

Stąd macierz $\left(\frac{\partial f_0}{\partial x_j}(x_0)\right)_{j=1,\dots,k}$ ma $k \times k$ podmacierz nieosobliwą ($\det \neq 0$)

Pochodne cząstkowe $\frac{(\partial f_t)_i}{\partial x_j}(x)$ są ciągłe na $X \times [0,1]$ oraz det jest funkcją ciągłą stąd det tej samej podmacierzy $k \times k$ macierzy $\left(\frac{\partial f_t}{\partial x_j}(x)\right)$ nie znika dla (x,t) z pewnego otoczenia U punktu (x_0, t) w $X \times [0,1]$

(c) submersje ta sama metoda

Stabilność (d) transwersalności wynika z (c) bo transwersalność można pokazać jako submersję.

(e) zanurzenie = immersja injektywna

Trzeba pokazać injektywność f_t z tego że to jest zanurzeniem

$G: X \times [0,1] \to Y \times [0,1]$ $\quad G(x,t) \overset{def}{=} (f_t(x), t)$

zał. że (e) nie jest prawdziwe

$\forall i \ \exists t_i \to 0 \ \exists x_i \neq y_i \ \ G(x_i, t_i) = G(y_i, t_i)$ $\quad X$ jest zwarty Stąd z ciągu $(x_i, y_i) \in X \times X$ możemy wybrać podciąg zbieżny $x_i \to x_0$, $y_i \to y_0$. Wtedy $G(x_0, 0) = \lim_{i \to 0} G(x_i, t_i) = \lim_{i \to 0} G(y_i, t_i) = G(y_0, 0)$

Stąd $f_0(x_0) = G(x_0, 0) = G(y_0, 0) = f_0(y_0) \Rightarrow x_0 = y_0$

Macierz Jacobiego $dG_{(x_0,0)} = \left(\begin{array}{ccc|c} & (df_0)_{x_0} & & * \\ & & & * \\ & & & * \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right)$

$(df_0)_{x_0}$ jest injekcją. Stąd ma k l. niezal wierszy. Stąd $(dG)_{(x_0,0)}$ ma $(k+1)$ l. niezal. wierszy

Stąd $(dG)_{(x_0,0)}$ jest lin. injekcją. Stąd G jest immersją w otoczeniu $(x_0, 0)$ i musi być injekcją w pewnym otoczeniu $(x_0, 0)$ czyli $\forall i$ dostatecznie dużego (x_i, t_i) i (y_i, t_i) należy do tego otoczenia co jest sprzeczne z $G(x_i,t_i) = G(y_i,t_i)$.

(f) dyfeomorfizmy

zał., że X, Y spójne

$f_0 : X \to Y$ dyfeom. $\quad f_t : X \to Y$ homotopia f_0 $\quad f_0 : X \to Y$ jest zanurzeniem i lok. dyfeom.

Stąd $\exists \varepsilon > 0 \ \forall t \in [0, \varepsilon)$ f_t jest zanurzeniem i lokalnym dyfeomorfizmem

$\forall U$ otwarty $\quad f_t(U)$ otwarty

X, Y niespójne

$f : X \to Y$ dyfeom. $\quad X = \bigcup X_i \quad X_i$ - składowe spójności

$Y = \bigcup Y_i \quad Y_i$ - składowe spójności

$f|_{X_i} : X_i \to Y_i$ co redukuje do poprzedniego przypadku.