Tw. (Sarda) Zbiór wartości krytycznych przekształcenia gładkiego $f: X \to Y$ ma miarę zero.

Wniosek. Zbiór wartości regularnych p. gładkiego $f: X \to Y$ jest gęsty w Y.

Jeżeli $f_i: X_i \to Y$ dla $i = 1, 2, 3, \dots$ są p. gładkimi to przecięcie zbioru wartości regularnych f_i jest gęste w Y.

Dowód.: Zał, że zbiór wartości regularnych $f: X \to Y$ nie jest gęsty w Y. Niech $m = \dim Y$.
$\exists a \in \mathbb{R}^m \; \exists r > 0$ $\Phi: U \to Y$ parametryzacja taka, że w zbiorze $\Phi(\prod_{i=1}^{m} [-r + a_i, a_i + r])$ nie ma wartości regularnych Y czyli ten zbiór jest zawarty w zbiorze wartości krytycznych. Sprzeczne z Tw. Sarda.

Druga część twierdzenia wynika z faktu, że przeliczalna suma zbiorów miary zero jest zbiorem miary zero.

$f: X \to \mathbb{R}$ funkcja gładka

$x \in X$ Wtedy x jest punktem regularnym albo $df_x = 0$.

Jeżeli x jest punktem regularnym to istnieje układ współrzędnych w otoczeniu x taki, że $(f \circ \Phi)(x_1, \dots, x_n) = x_1$, gdzie $\Phi: \underset{\mathbb{R}^n}{U} \to X$ $n = \dim X$

Jeżeli X jest zwarty to f osiąga ekstrema na X czyli istnieją conajmniej 2 punkty krytyczne na X (maksimum i minimum), jeśli $X \neq \{pt\}$.

Jeżeli x jest punktem krytycznym $f: U \to \mathbb{R}$ p. gł. $x \in U \subset \mathbb{R}^n$ otwarty $df_x = 0$ czyli $\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_x = 0$ dla $i = 1, \dots, n$

$H = \left(\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_x \right)$ macierz Hessego (Hessian)

f jest niezdegenerowanym punktem krytycznym jeżeli $\det H \neq 0$

Stw. Jeżeli x jest punktem krytycznym f. gładkiej $f: X \to \mathbb{R}$ to warunek niezdegenerowania x nie zależy od wyboru układu współrzędnych.

Dowód.: Zdefiniujemy symetryczny 2-liniowy funkcjonał d^2f na T_pM, który nazywamy Hessianem następującym wzorem

Hessian $d^2f(v,w) = d(df(W))(v)$ gdzie $v, w \in T_xM$ oraz W jest gł. polem wektorowym na X takim, że $W(x)=w$.

Stw. Hessian d^2f jest symetryczny.

Dowód. $d^2f(w,v) = d(df(V))(w) = w(V(f))$ gdzie V jest gł. polem wektorowym na X takim, że $V(x)=v$.

Stąd $d^2f(v,w) - d^2f(w,v) = v(W(f)) - w(V(f)) = V(x)(W(f)) - W(x)(V(f)) = [V,W](x)(f) =$

$df|_x([V,W]|_x)$ i $df|_x = 0$. Stąd $d^2f(v,w) = d^2f(w,v)$ $\square$

$d^2f(v,w) = v(W(f)) = w(V(f))$ ← nie zależy od wyboru gł. pola wektorowego W t, że $W(x)=w$

nie zależy od wyboru gł. pola wektorowego V t, że $V(x)=v$

Stąd $d^2f(v,w)$ jest dobrze zdefiniowane

W lok. układzie współrzędnych $(x_1,\dots,x_n)$ $v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x$ $w = \sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x$ Niech $W = \sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial}{\partial x_i}$

stałe

Wtedy $d^2f(v,w) = v(W(f)) = v\left(\sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_x \left(\sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum_{i,j=1}^n v_j w_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\Big|_x$

Stąd $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\Big|_x\right)$ – to macierz Hessianu w bazie $\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_x, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_x$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_x = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_x = 0$$

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\Big|_x = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\Big|_x dx_i \quad \text{elementy } (\mathbb{R}^n)^*$$

$\det H \neq 0 \iff d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)\Big|_x, \ldots, d\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\Big|_x$ są l. niezależne

czyli p. gładkie $g := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest lok. dyfeomorfizmem

$g^{-1}(0) = \{ \tilde{x} \in U \mid \frac{\partial f}{\partial x_1}\big|_{\tilde{x}} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}\big|_{\tilde{x}} = 0 \}$ – podrozmaitość codim $= n$ w $\mathbb{R}^n$ czyli punkt.

Stąd x jest izolowanym punktem krytycznym.

Lemat Hadamarda

Zał. $f : U \to \mathbb{R}$ f. gładka $U \subset \mathbb{R}^n$ otwarty gwiaździsty względem $a \in U$ tzn. $\forall x \in U \ \forall t \in [0,1] \ a + t(x-a) \in U$

Teza $\exists g_i : U \to \mathbb{R}$ f. gładkie takie, że $f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i) g_i(x)$

Dowód Lematu H: $h(t) = f(a + t(x-a)) \quad \forall t \in [0,1]$ $\quad \frac{dh}{dt}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + t(x-a)) \cdot (x_i - a_i)$

$$h(1) - h(0) = \int_0^1 \frac{dh}{dt}(t)\, dt = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + t(x-a))(x_i - a_i)\, dt = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + t(x-a))\, dt$$

$$h(1) - h(0) = f(x) - f(a) \qquad g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + t(x-a))\, dt \qquad i = 1, \ldots, n.$$

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i) g_i(x) \quad \square$$

Lemat Morse'a.

Niech $a \in U \subset \mathbb{R}^n$ otwarty będzie niezdegenerowanym punktem krytycznym funkcji gładkiej $f: U \to \mathbb{R}$, gdzie $U \subset \mathbb{R}^n$ otwarty.

Wtedy istnieje lokalny układ współrzędnych $(x_1, \dots, x_n)$ w otoczeniu a taki, że

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(a) + \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \qquad \text{w otoczeniu } a = 0$$

Dowód.: Przez translację o wektor $-a$ możemy założyć, że $a = 0$.

Z lematu Hadamarda otrzymujemy, że $f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j} = g_j(x) + \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)$ $\quad 0 = \frac{\partial f}{\partial x_j}(0) = g_j(0)$

Stąd $g_j(0) = 0$ dla $j = 1, \dots, n$. Z lematu Hadamarda $g_j(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i h_{ij}(x)$ dla $j = 1, \dots, n$

Z lematu Hadamarda $h_{ij}(x) = h_{ij}(0) + \sum_{k=1}^{n} x_k r_{ijk}(x)$

Stąd $$f(x) = f(0) + \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j h_{ij}(0) + \sum_{i,j,k=1}^{n} x_i x_j x_k r_{ijk}(x)$$

$h_{ij}(0) = h_{ji}(0)$ $\quad H = \left(h_{ij}(0)\right)$ – Hessian w 0 macierz symetryczna i niezdegenerowana

Liniową zamianą zmiennych sprowadzamy H do postaci $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

czyli $$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 + \sum_{i,j,k=1}^{n} x_i x_j x_k r_{ijk}(x)$$

Niech $f_t(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 + t\, r(x)$ gdzie $r(x) = \sum_{i,j,k=1}^{n} r_{ijk}(x)\, x_i x_j x_k$

$f_0(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$ $\quad f_1(x) = f(x)$ Szukamy rodziny dyfeom. lokalnych (zamian zmiennych)

Φ_t $\quad t \in [0,1]$ takiej, że $(*)\ f_t \circ \Phi_t = f_0$ $\quad \Phi_0(x) = x$ $\quad \Phi_t(0) = 0$ Wtedy $f \circ \Phi_1 = f_0$

$$\frac{d}{dt}(f_t \circ \Phi_t) = \frac{df_t}{dt} \circ \Phi_t + df_t\left(\frac{d\Phi_t}{dt}\right) = 0 \qquad \frac{d\Phi_t}{dt} = V_t \circ \Phi_t \qquad V_t(0) = 0$$

$$\frac{df_t}{dt} + df_t(V_t) = 0$$

$$r(x) + df_t(V_t) = 0 \qquad V_t = \sum_{i=1}^{n} V_t^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$df_t(V_t) = df_t\left(\sum_{i=1}^{n} V_t^i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} V_t^i \frac{\partial f_t}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} V_t^i \left(2\lambda_i x_i + t \frac{\partial r}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} y_i V_t^i = -r$$

$$y_i = 2\lambda_i x_i + t \frac{\partial r}{\partial x_i}$$

$$\det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)\Big|_0 \neq 0 \quad \forall t \qquad \frac{\partial r}{\partial x_i}(0) = 0$$

$$r(y) = \sum_{i,j,k} y_i y_j y_k \tilde{r}_{i,j,k}(t, y)$$

Stąd $\sum_{i=1}^{n} y_i V_t^i = \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{j,k=1}^{n} y_j y_k \tilde{r}_{ijk}(t, y)$ $\qquad V_t^i = \sum_{j,k=1}^{n} y_j y_k r_{ijk}(t, y)$

$$V_t^i(0) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\Phi_t = V_t \circ \Phi_t \qquad \Phi_0 = Id \qquad V_t(0) \equiv 0 \qquad \square$$

Lemat. zał. $U \subset \mathbb{R}^k$ otwarty $f: U \to \mathbb{R}$ gładka

Teza. Dla prawie każdego $a = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k$ funkcja $f_a(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ jest f. Morse'a.

Dowód.: Niech $g = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_k}\right): U \to \mathbb{R}^k$.

Wtedy $(df_a)_p = \left(\frac{\partial f_a}{\partial x_1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial f_a}{\partial x_k}\Big|_p\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_p + a_1, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_p + a_k\right) = g(p) + a$

Stąd p jest punktem krytycznym $f_a \iff g(p) = -a$

$\frac{\partial^2 f_a}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ Hessian funkcji f_a to macierz Jacobiego przekształcenia g czyli $(dg)_p$

Z Tw. Sarda zbiór wartości krytycznych przekształcenia g jest zb. miary zero. Jeżeli $-a$ jest wart. reg. przek. g to $g(p) = -a$ i $(dg)_p$ jest nieosobliwa czyli każdy punkt krytyczny p funkcji f_a jest niezdegenerowany bo Hessian f_a jest nieosobliwy. Stąd z tw. Sarda f_a jest f. Morse'a dla prawie wszystkich $a \in \mathbb{R}^k$. $\square$

Tw. zał. $X \subset \mathbb{R}^N$ rozm. gładka $f: X \to \mathbb{R}$ f. gładka

Teza Dla prawie wszystkich $a = (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^N$ $f_a(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{N} a_i x_i$ jest f. Morse'a.

Dowód.: $\dim X = k$ $p \in X$ $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ $\exists\, U$ otoczenie p w X $\exists\, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ $(x_i(x) = x_i)$ takie, że $(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ są ukł. współrzędnych na X w U. Wynika to z następującego faktu

Stw. Jeżeli $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ jest bazą p. lin. V^*. Niech $W \subset V$ p. liniowa $\dim W = k$

Wtedy istnieją $\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k}$ takie, że $\varphi_{i_1}|_W, \dots, \varphi_{i_k}|_W$ są lin. niezależne.

Dowód: $W^\perp = \{\varphi \in V^* \mid \varphi|_W = 0\}$ – pod. lin V $\dim = N - k$ gdzie $N = \dim V$

$\psi_1, \dots, \psi_{n-k}$ – baza $W^\perp$ Bazę $\psi_1, \dots, \psi_{n-k}$ można rozszerzyć do bazy V^* elementami z $\varphi_1, \dots, \varphi_N$

Niech $\overset{\alpha_1}{\overset{\shortparallel}{\varphi_1}},\dots,\overset{\alpha_{n-k}}{\overset{\shortparallel}{\varphi_{n-k}}},\overset{\alpha_{n-k+1}}{\overset{\shortparallel}{\varphi_{i_1}}},\dots,\overset{\alpha_N}{\overset{\shortparallel}{\varphi_{i_k}}}$ baza V^* $\qquad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix}$

$w_1,\dots,w_k$ – baza W $\quad$ Rozszerzamy $w_1,\dots,w_k$ do bazy V $\quad w_1,\dots,w_k,w_{k+1},\dots,w_N$

$\varphi_i(w_j) = 0$ $\qquad$ Macierz

$$\big(\alpha_i(w_j)\big) = \big(\alpha(v_1),\dots,\alpha(v_N)\big) = \begin{array}{c} \\ k\Big\{ \end{array}\left[\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline \underbrace{\varphi_{i_l}(w_j)}_{k} & * \end{array}\right]\begin{array}{l} \}\,N-k \\ \\ \end{array}$$

$$\det\big(\varphi_{i_l}(w_j)\big)_{\substack{l=1,\dots,k \\ j=1,\dots,k}} \neq 0 \quad \text{stąd}$$

$\varphi_{i_1}|_W,\dots,\varphi_{i_k}|_W$ l. niezal. $\quad \square$

Niech $\varphi_i = dx_i$

Czyli $x_{i_1},\dots,x_{i_k}$ – układ współ. na U

Tworzymy pokrycie X zb. U o tej własności. Można, zał. że jest to pokrycie przeliczalne $(U_\alpha)_{\alpha=1,2,\dots}$

zał. że $x_1,\dots,x_k$ dają układ współ. na U_α

Niech $c=(c_{k+1},\dots,c_N)\in\mathbb{R}^{n-k}$ $\quad f_{(0,c)}(x) = f(x)+c_{k+1}x_{k+1}+\dots+c_Nx_N$. Wtedy z lematu otrzymujemy, że dla prawie wszystkich $b\in\mathbb{R}^k$ funkcja $f_{(b,c)}(x) = f_{(0,c)}(x)+b_1x_1+\dots+b_kx_k$ jest f. Morse'a

Niech S_α to będzie zb. punktów $a \in \mathbb{R}^N$ t, że f_a nie jest f. Morse'a.

Pokazaliśmy, że $S_\alpha \cap \mathbb{R}^k \times \{c\}$ ma miarę zero w $\mathbb{R}^k$. Z tw. Fubiniego S_α ma miarę zero. Pokazaliśmy, że tw. prawdziwe w U_α. Zbiór punktów $a \in \mathbb{R}^N$ t, że f_a nie jest f. Morse'a na X jest sumą (kowiemnogościową) zbiorów $\bigcup_{\alpha=1}^{\infty} S_\alpha$. Każdy z S_α jest zb. miary zero. Więc ich suma ma miarę zero. $\square$