Krótki kurs historii matematyki
Wojciech Domitrz
MiNI PW

Wykład 1

Prehistoria matematyki, matematyka babilońska i egipska

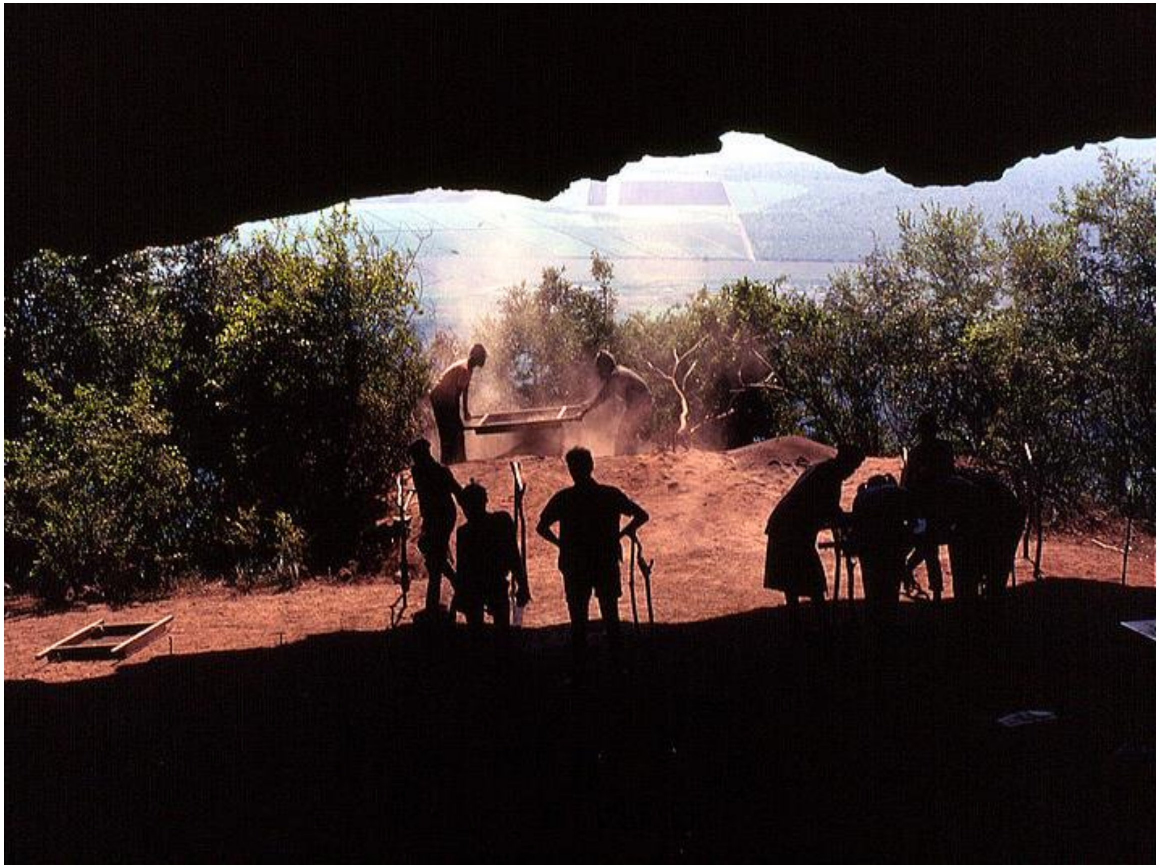
Pojęcie liczby

Pojęcie przestrzeni (odległości)

Autor zdjęcia: **Profberger na en.wikipedia**

Czy zwierzęta umieją liczyć?

G. Ifrah ,,Powszechna historia cyfr”



Autor zdjęcia: Androstachys

Kość z Lebombo (kość strzałkowa pawiana) ok. 35000 p.n.e.

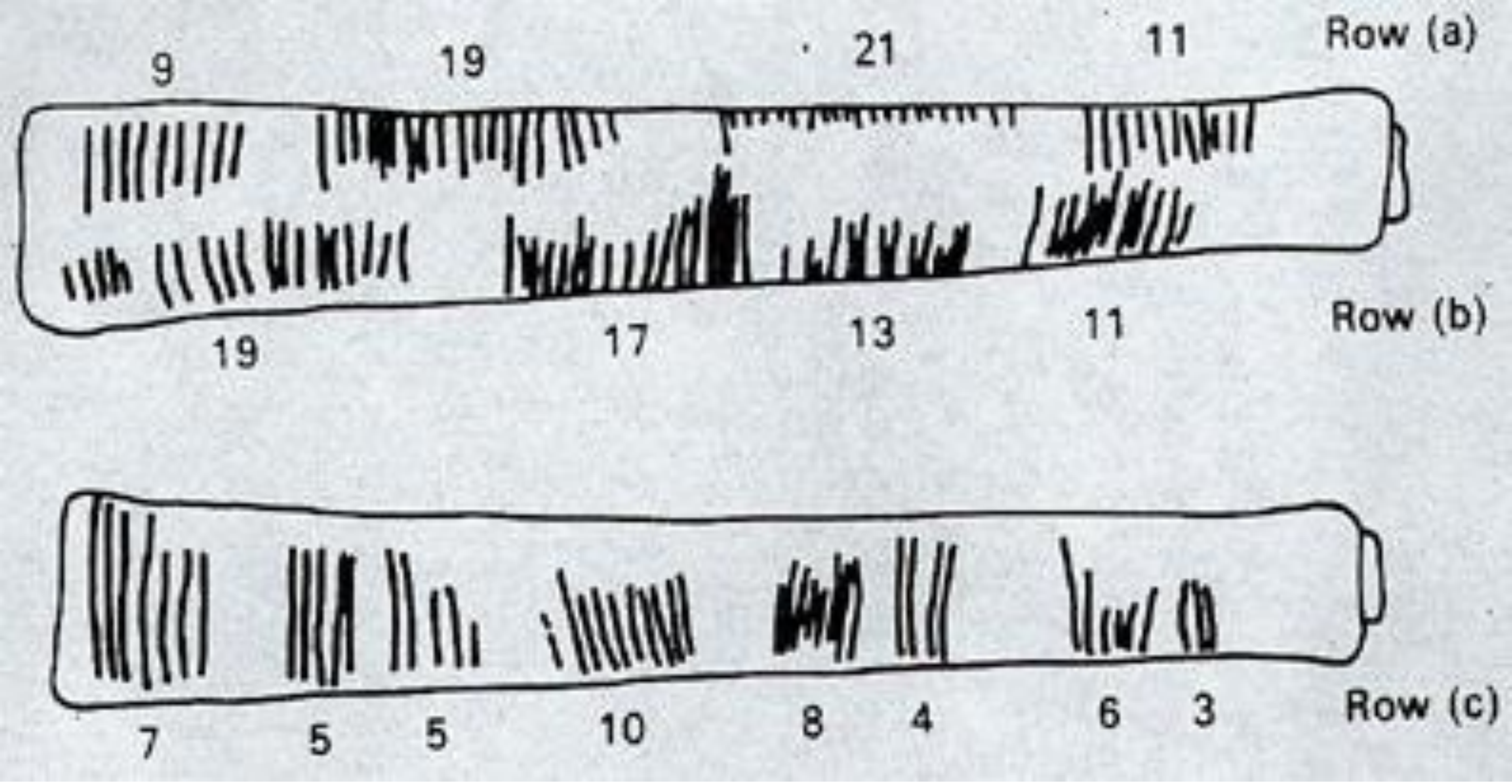
Znaleziona w górach Lebombo na granicy między Królestwem Suazi a RPA w Jaskini Granicznej.

29 nacięć (28 dni trwa miesiąc księżycowy ???)

Kość z Ishango ok. 20000 p.n.e.

zdjęcie i własność: Science Museum of Brussels

znaleziona w 1950 w źródłach Nilu (północno-wschodnie Kongo) przez belgijskiego geologa Jeana de Heinzelin de Braucourt



Kość z Ishango ok. 20000 p.n.e.

http://www.math.buffalo.edu/mad/Ancient-Africa/ishango.html

20+1=21, 20-1=19, 10+1=11, 10-1=9,

11, 13, 17, 19 to liczby pierwsze z przedziału [10;20]

9+19+21+11=60=19+17+13+11

5+5=10 8=2x4 6=2x3

W. Domitrz ,,Krótki kurs historii matematyki''

Różne sposoby liczenia

Denise Schmant-Besserat ,,Jak powstało pismo ?"

- **Jeden, dwa, dużo**
  Wedowie ze Sri Lanki : pojedynczy, para, jeszcze jeden, dużo.
- **Relacja 1-1**
  Wedowie: Liczenie kokosów za pomocą patyczków.
  Ile kokosów?
  Tak dużo. I pokazuje patyczki.
- **Liczenie konkretne**
  Liczenie powyżej trzech za pomocą części ciała.
  Stosowanie różnych liczebników do różnych rzeczy. 24 klasy liczb.
  Jak się tu liczy?
  Jak się liczy co? Inaczej krowy, inaczej muszle (Północna Ghana).
- **Liczenie abstrakcyjne**
  siedem krów i siedem muszli to razem czternaście obiektów

Wiele wieków musiało upłynąć, zanim odkryto, że para bażantów i para dni to dwa przykłady użycia liczby dwa.

Bertrand Russel

Jeden, dwa i ... dużo

G. Ifrah ,,Historia powszechna cyfr"

Australijskie plemię Aranda (A. Sommerfelt)

1- ninta, 2- tara, 3- tara-mi-ninta, 4- tara-ma-tara , wiele

Wyspy Murray (A. E. Hunt)

1- netat, 2- neis, 3- neis-netat, 4- neis-neis, tłum

Wyspy z Cieśniny Torresa (A. C. Haddon)

1- urapun, 2- okosa, 3- okosa-urapun, 4- okosa-okosa, ras (dużo)

System liczebników tybetańskich, dziesiętny
G. Ifrah ,,Historia powszechna cyfr”

1. gczig
2. gńis
3. gsum
4. bżi
5. lnga
6. drug
7. bdun
8. brgjad
9. dgu
10. bczu

11. bczu-gczig (=10+1)
12. bczu-gńis (=10+2)
13. bczu-gsum (=10+3)

...

19. bczu-dgu(=10+9)
20. gńis-bczu(=2x10)
30. gsum-bczu(=3x10)

...

90. dgu-bczu(=9x10)
100. brgja

200. gńis-brgja (=2x100)
300.gsum-brgja(=3x100)

...

900.bczu-gsum (=9x100)

23. bńis-bczu rca gsum (=2x10+3)

390. gsum-brgja rca dgu-bczu (=3x100+9x10)

Możliwe, że gdyby ludzie mieli jedenaście palców, przyjąłby się jedenastkowy system numeracji

Henri Lebesgue

System liczebników w języku api (Nowe Hybrydy), piątkowy

G. Ifrah ,,Historia powszechna cyfr"

1. tai
2. lua
3. tolu
4. vari
5. luna (dłoń)
6. otai (nowe jeden)
7. olua (nowe dwa)
8. otolu (nowe trzy)
9. ovari (nowe cztery)
10. lualuna (dwie dłonie)
11. lualuna tai(=2x5+1)
12. lualuna tua (=2x5+2)
13. lualuna tou (=2x5+3)
14. lualuna vari (=2x5+4)
15. tolulluna (=3x5)
16. tolulluna tai (=3x5+1)
17. tolulluna lua (=3x5+2)

System liczebników w języku azteckim, piątkowo-dwudziestkowy

G. Ifrah ,,Historia powszechna cyfr"

1. ce
2. ome
3. yey
4. naui
5. chica albo macuilli
6. chica-ce (=5+1)
7. chic-ome (=5+2)
8. chica-ey (=5+3)
9. chic-naui (=5+4)
10. matlactli

W. Domitrz ,,Krótki kurs historii matematyki"

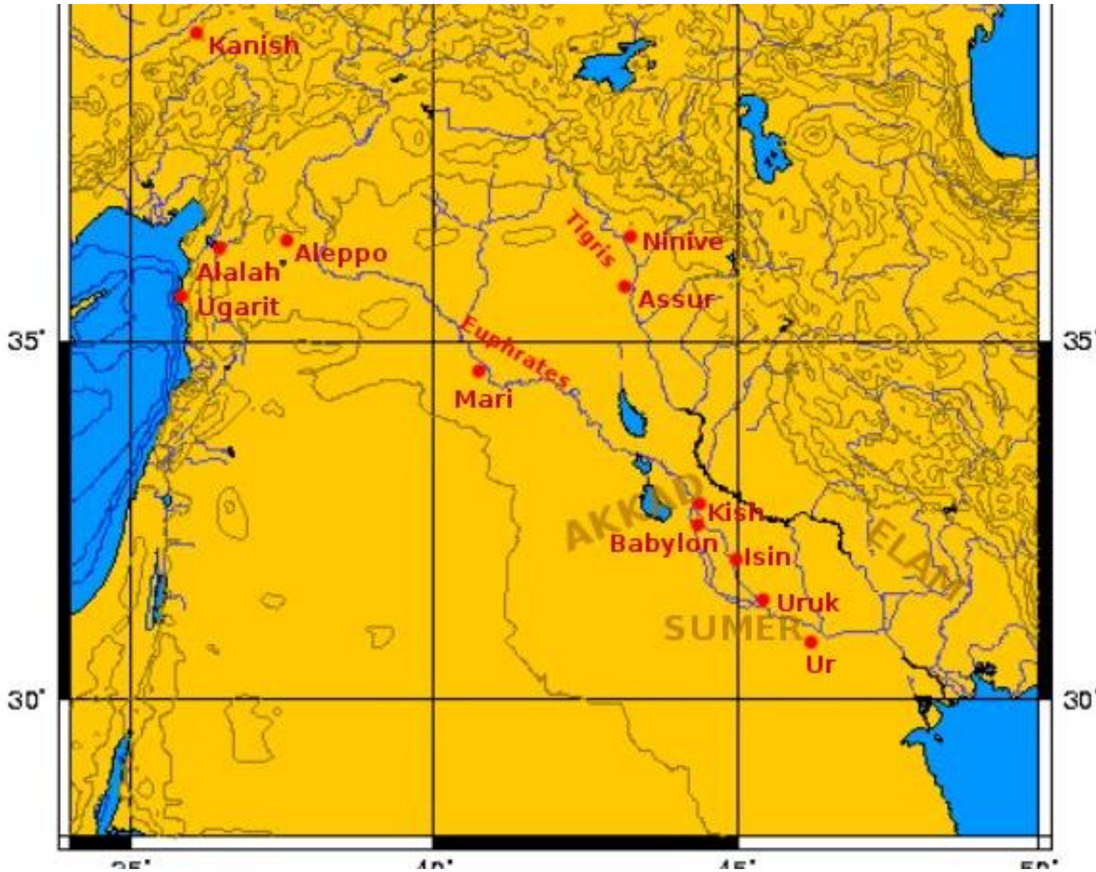
11. matlactli-on-ce(=10+1)

...

14. matlactli-on-naui (=10+4)
15. cauxtulli
16. cauxtulli-on-ce (=15+1)

...

19. cauxtulli-on-naui(=15+4)
20. cem-poualli (=1x20)
30. cem-poualli-on-matlactli (=20+10)
100. macuil-poualli(=5x20)

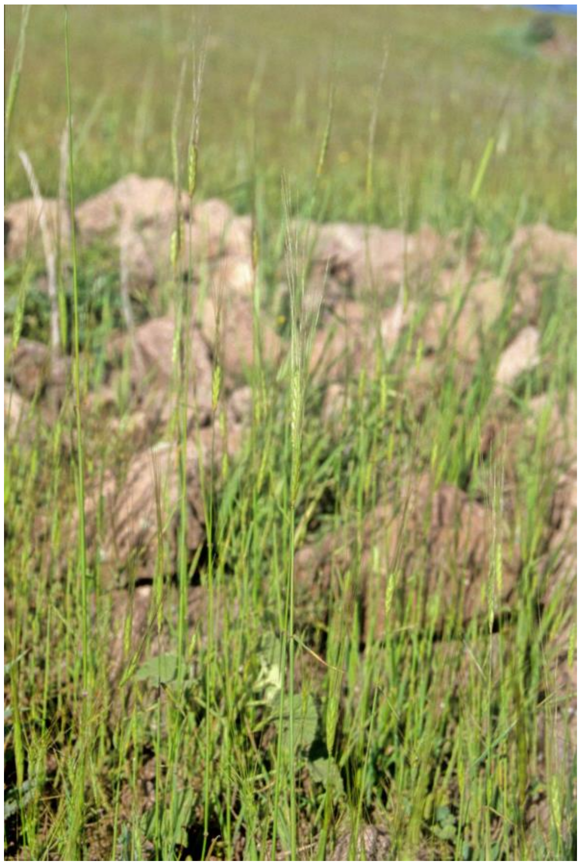


Mezopotamia

Od około 10000 p.n.e.

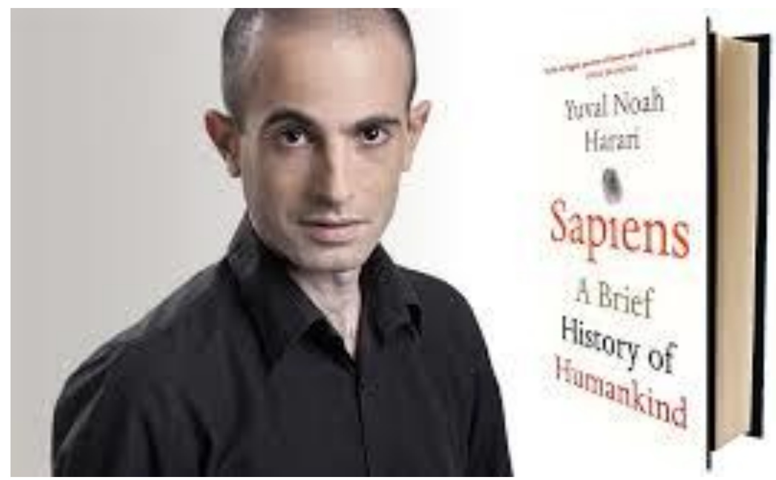
Rewolucja neolityczna

Zboże udomowiło człowieka?

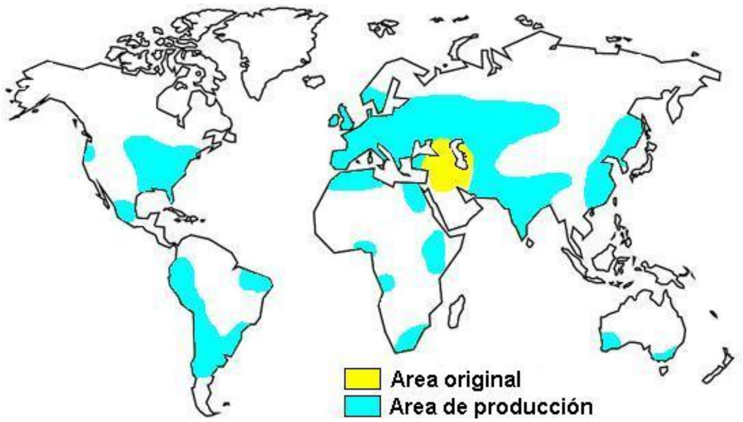


Yuval Noah Harari

„Od zwierząt do bogów. Krótka historia ludzkości”



249 mln ton (2016)
obszar upraw 220,4 mln ha (2014)



Denise Schmant-Besserat :”Before Writing” 1992, „Jak powstało pismo ?” 2007.

Analiza ponad 8 000 tokenów-liczmanów (najstarsze z ok. 8000 p.n.e.) znalezionych w Iraku, Iranu, krajów Lewantu i Turcji. Używane powszechnie przez 5000 lat.

Pismo klinowe, wynalezione na Starożytnym Wschodzie w końcu IV tysiąclecia p.n.e. (najstarszy znany system pisma na ziemi) wywodzi się z archaicznego systemu liczenia.

podziękowania za zdjęcia dla prof. Schmant-Besserat

Przejście od liczenia konkretnego do abstrakcyjnego

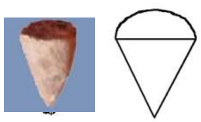
Denise Schmant-Besserat „Jak powstało pismo ?”

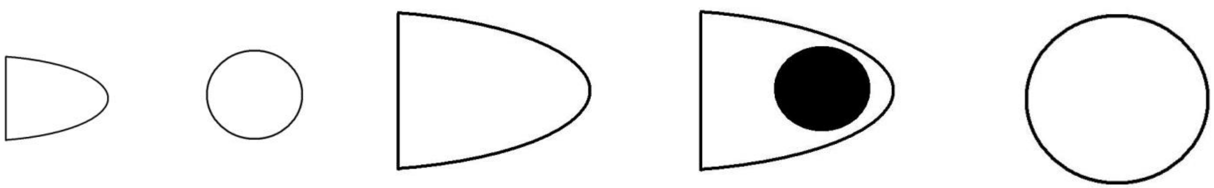
- ok. 8000-3500 p.n.e. liczenie konkretne

 3 dzbany oliwy ,  3 małe miary zboża

dzbany oliwy , dzban oliwy, dzban oliwy

- ok.3100 p.n.e. wynaleziono cyfry

 1 dzban oliwy ,  3 dzbany oliwy ,



1 10 60 600 3600

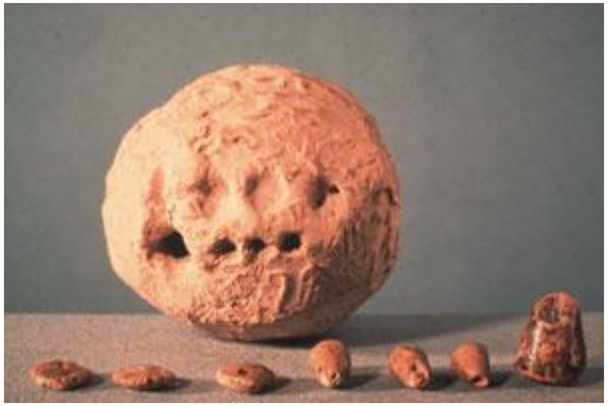
- ok. 3100-2500 p.n.e. przejście od liczenia konkretnego do abstrakcyjnego

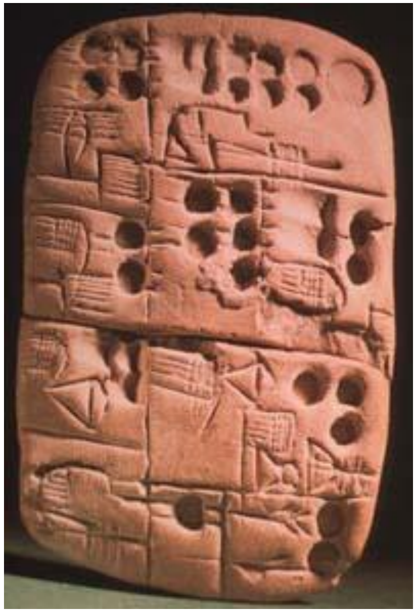
Matematyka i komunikacja międzyludzka

Denise Schmant-Besserat „Jak powstało pismo ?"

ok. 3700-2600 p.n.e. Tokeny reprezentujące konkretne transakcje zaczęto zamykać w kopertach i przechowywać w kopertach. Na powierzchni niektórych kopert widniały odciski tokenów znajdujących się wewnątrz.

ok.3500-3100 p.n.e. Koperty zastąpiono tabliczkami ze znakami odciśniętymi oddającymi kształt token





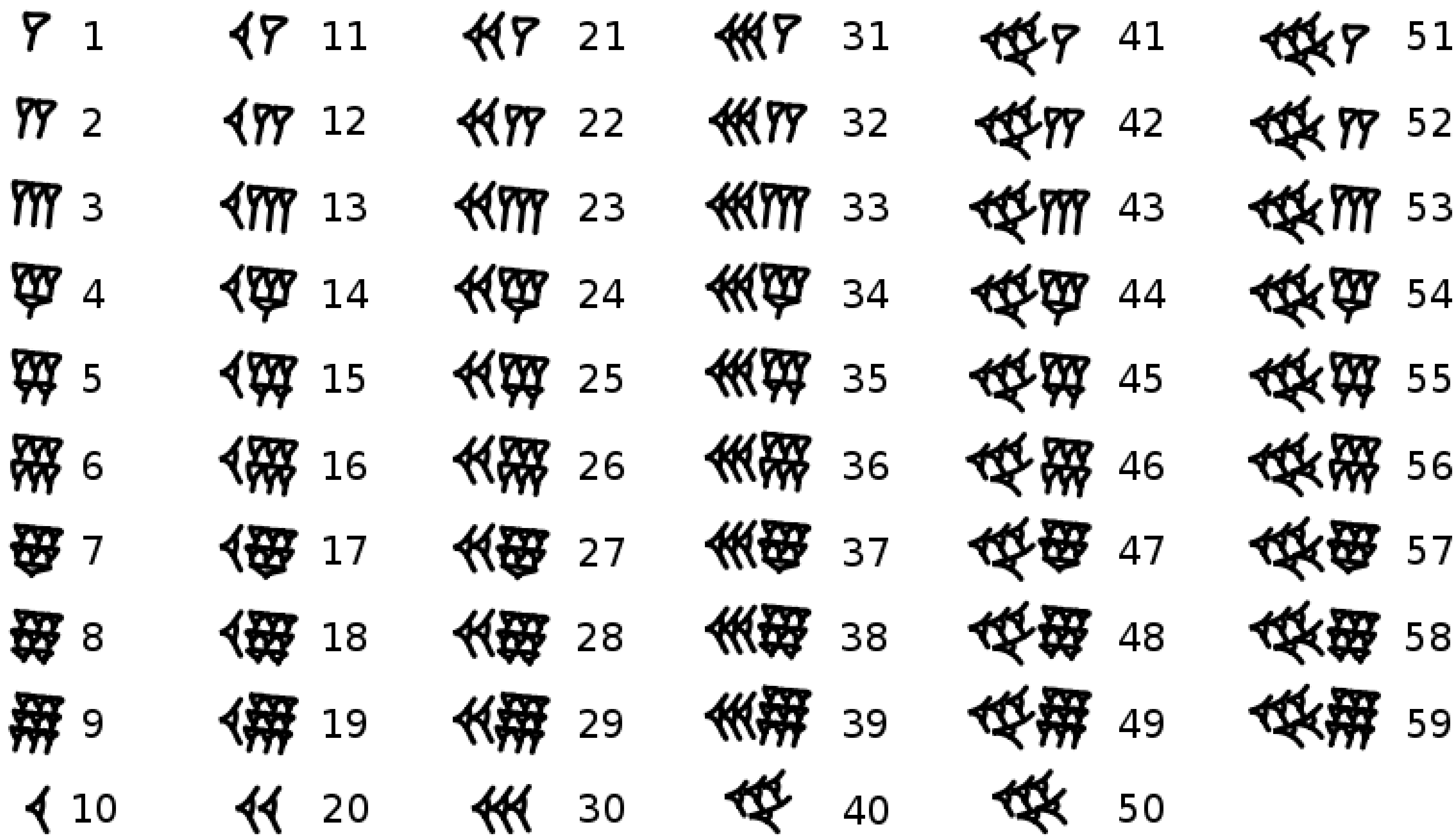
ok. 3100-3000 p.n.e. Pojawienie się pisma piktograficznego Rozdzielenie pojęcia liczby i przedmiotu liczonego, wyodrębnione cyfry i piktogramy zaczęły obejmować także inne rodzaje działalności – powstaje pismo fonetyczne. Wynalazek cyfr abstrakcyjnym dał początek także rozwojowi pisma.

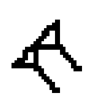
Matematyka Babilońska

Matematyka wschodnia nauka praktyczna

- Obliczanie kalendarza
- Administracja zbiorów
- Organizacja prac publicznych
- Zbieranie podatków
- Handel

cyfry babilońskie
(pozycyjny system sześćdziesiątkowy)



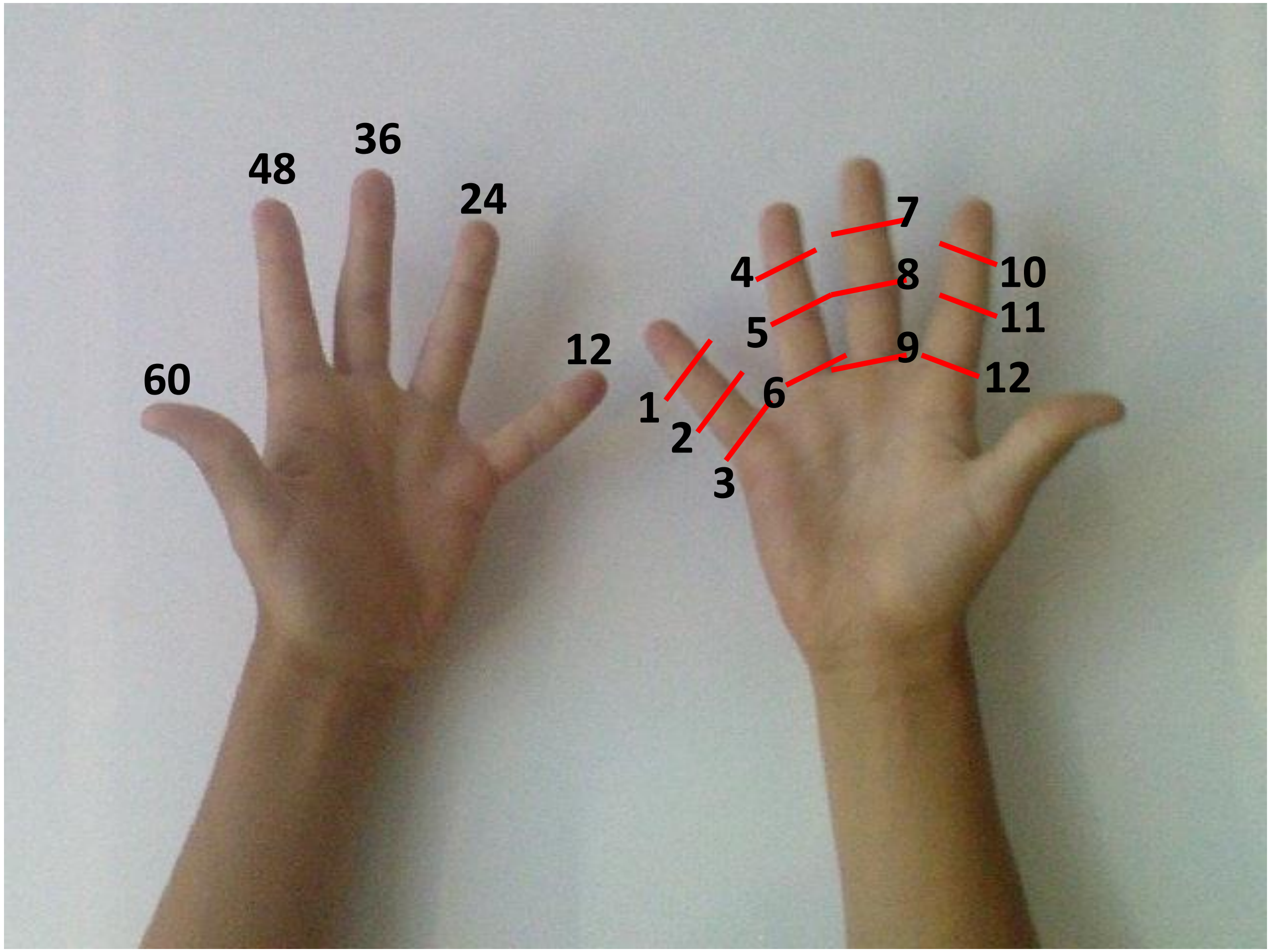


symbol oznaczający 0 w zapisie liczb

60=2x30=3x20=4x15=5x12=6x10

W. Domitrz ,,Krótki kurs historii matematyki''

Na palcach do 60...



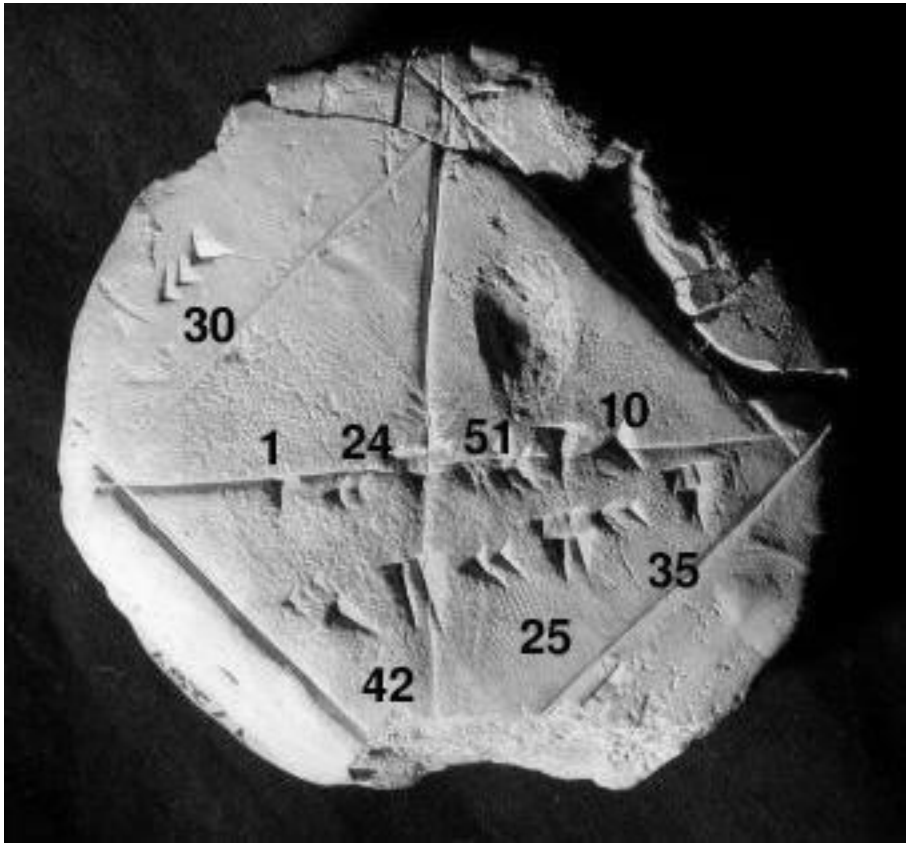
System sześćdziesiątkowy

- Doba **24** godziny
- Godzina **60** minut
- Minuta **60** sekund
- Kąt pełny **360** stopni
- Stopień **60** minut
- Minuta **60** sekund
- Obserwacje astronomiczne: prawie **2000** tabliczek np. z zestawieniem obserwacji ruchu Merkurego, Marsa, Jowisza i Saturna.
- Okres orbitalny Marsa **779,955** dni.
- Obliczenia współczesne **779,936** dni.

Tabliczka YBC 7289 (Yale Babylonian Collection, ok. 1800-1600 pne.)

Długość boku kwadratu 30. Długość przekątnej $42+25/60+35/60^2 \approx 42{,}4264$

$$1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3 \approx 1.41421296... \approx \sqrt{2}$$



autor: Bill Casselman http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/ybc/ybc.html

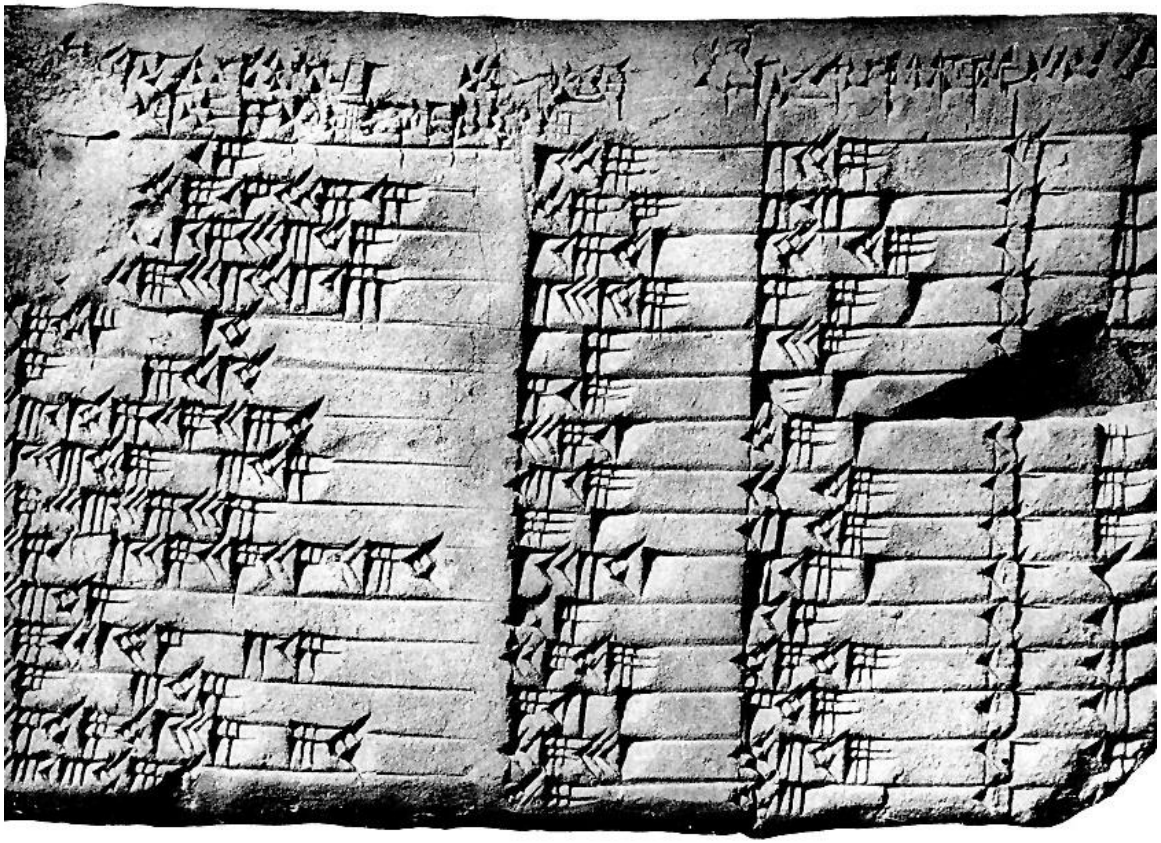
Tabliczka YBC 7302 (ok. 1900-1600 pne)

autor: Cuneiform Digital Library Initiative

Pole koła o obwodzie 3 jest równe 45/60.

Obwód koła $2\pi r=3$.
$r=3/(2\pi)$.
Pole koła $45/60= 9/(4\pi)$.

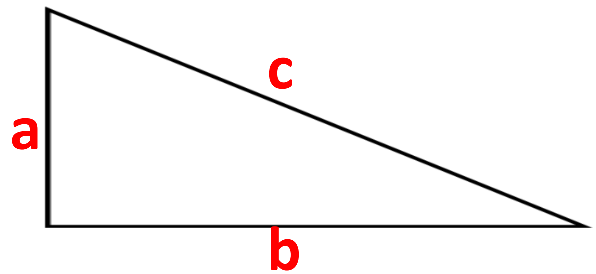
$\pi=3$



Plimpton 322 (ok. 1800 p.n.e)
Uniwersytet Columbia

a^2/b^2 lub c^2/b^2	a	c	
(1:)59:00:15	1:59	2:49	1
(1:)56:56:58:14:50:06:15	56:07	1:20:25	2
(1:)55:07:41:15:33:45	1:16:41	1:50:49	3
(1:)53:10:29:32:52:16	3:31:49	5:09:01	4
(1:)48:54:01:40	1:05	1:37	5
(1:)47:06:41:40	5:19	8:01	6
(1:)43:11:56:28:26:40	38:11	59:01	7
(1:)41:33:45:14:03:45	13:19	20:49	8
(1:)38:33:36:36	8:01	12:49	9
(1:)35:10:02:28:27:24:26	1:22:41	2:16:01	10
(1:)33:45	45	1:15	11
(1:)29:21:54:02:15	27:59	48:49	12
(1:)27:00:03:45	2:41	4:49	13
(1:)25:48:51:35:06:40	29:31	53:49	14
(1:)23:13:46:40	56	1:46	15

Tłumaczenie Plimpton 322



W. Domitrz ,,Krótki kurs historii matematyki''

Babilońskie zadanie i babilońskie rozwiązanie

S. Kulczycki ,,Z dziejów matematyki greckiej"

- **Zadanie**

  Z pierwszego kawałka gruntu zbieram **20** sila z **1** bar = **30** SAR.

  Z drugiego kawałka gruntu zbieram **15** sila z **1** bar = **30** SAR.

  Pierwsze pole dało o **8 1/3** więcej niż drugie. Moje grunty razem miały **30** SAR.

  Moje grunty co?
- **Rozwiązanie współczesne**

$$\begin{cases} 20/30\ x - 15/30\ y = 8\ 1/3, \\ x + y = 30 \end{cases}$$

Babilońskie zadanie i babilońskie rozwiązanie

S. Kulczycki ,,Z dziejów matematyki greckiej”

- **Rozwiązanie babilońskie**

30, sumę gruntów, rozbij na dwie części, weź **15** i **15**.

Utwórz odwrotność **30**, pola, jest **1/30**.

1/30 pomnóż przez zboże **20**, któreś zebrał, **20/30** jest zbożem, które wypadło.

Pomnóż przez **15**, jest **10**, i **10** zachowaj w głowie.

Odwrotność **30** utwórz, i jest **1/30**.

1/30 przez **15**, zboże, któreś zebrał, pomnóż.

15/30 jest to zboże tymczasowe.

Pomnóż przez **15**, jest **7 ½**.

10, które zachowała Twoja głowa, o ile wychodzi poza **7 ½**?

O **2 ½** wychodzi.

2 ½ od **8 1/3**, zboża, odejmij i zostanie Ci **5 5/6**.

W. Domitrz ,,Krótki kurs historii matematyki''

Babilońskie zadanie i babilońskie rozwiązanie

S. Kulczycki ,,Z dziejów matematyki greckiej"

- **c. d. Rozwiązania babilońskiego**

20/30 i **15/30** dodaj, i jest **1 1/6**.

Co trzeba pomnożyć przez **1 1/6**, aby mieć **5 5/6**, które zachowała Twoja głowa?

5 pomnożone przez **1 1/6**, da Ci **5 5/6**.

5, któreś uzyskał, do jednego z dwóch **15** dodaj, a od drugiego odejmij, i masz z pierwszego **20**, a z drugiego **10**.

20 jest powierzchnia pierwszego gruntu, **10** drugiego.

Babilońskie zadanie i babilońskie rozwiązanie

S. Kulczycki ,,Z dziejów matematyki greckiej”

- **c. d. Rozwiązania babilońskiego (sprawdzenie)**

Jeżeli **20** jest powierzchnią pierwszego gruntu, **10** powierzchnią drugiego gruntu, oba zboża są czym?

Odwrotność **30** utwórz, i jest **1/30**.

1/30 pomnóż przez zboże , któreś zebrał, **20/30** pomnóż przez **20**, powierzchnię pierwszego gruntu.

13 1/3 jest zbożem pierwszego gruntu.

Odwrotność **30** utwórz, i jest **1/30**.

1/30 przez **15**, zboże pomnóż, **15/30**.

15/30 pomnóż przez **10** pole. **5** jest zbożem.

Zboże **13 1/3** o ile wychodzi poza zboże **5** ?

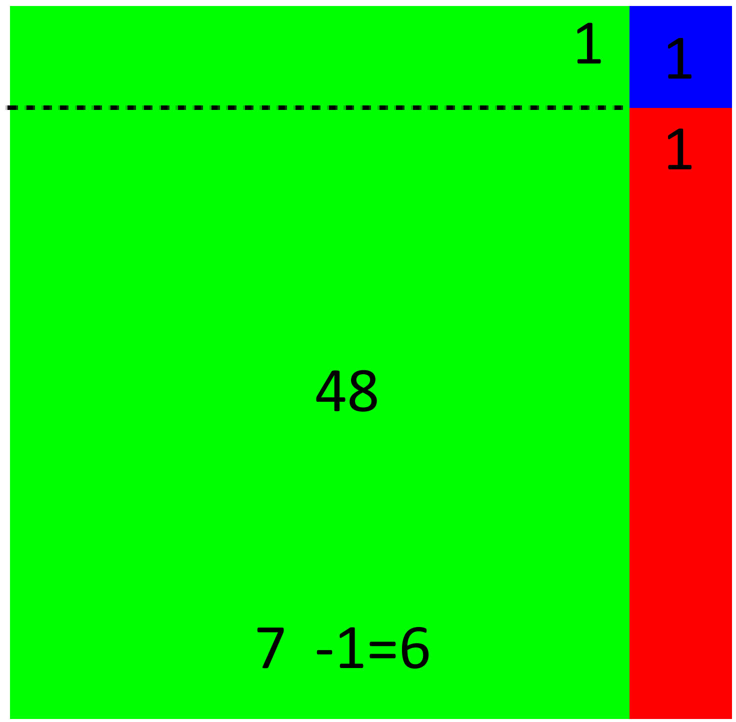
O **8 1/3** wychodzi.

Jak Babilończycy rozwiązywali równania kwadratowe bez algebry?

Dany jest prostokąt o polu 48. Długości jego boków różnią się o 2.

Pole dodanego niebieskiego kwadratu wynosi 1.

8=1+ 7



Pole dużego kwadratu wynosi 48+1=49. Długość jego boku to 7.

Długość krótszego boku prostokąta to 7-1=6, a dłuższego 7+1=8.

Geometria babilońska

Witold Więsław ,,Matematyka i jej historia”.

- Pole prostokąta o bokach **a** i **b** to **ab**.
- Pole trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych **a** i **b** to **½ab**.
- Długości odpowiednich boków w podobnych trójkątach prostokątnych są proporcjonalne
- Pole trapezu o wysokości **h** bokach **a** i **b** to **½(a+b)h**.
- Wysokość w trójkącie równoramiennym dzieli podstawę na połowy.
- Kąt wpisany w półkole jest prosty.
- Średnica koła to ⅓ obwodu, a pole to **1/12** kwadratu obwodu czyli **$\pi=3$**.
- Objętość prostopadłościanu o podstawie prostokątnej i bokach **a**, **b, c** to **abc**.
- Objętość prostopadłościanu o podstawie trapezowej to iloczyn pola podstawy i wysokości.
- Objętość walca to iloczyn pola podstawy i wysokości.
- Objętość stożka ściętego o wysokości **h** i polach podstawy P_1 i P_2 to $\frac{1}{2}(P_1+P_2)h$ (wzór przybliżony).

Arytmetyka babilońska.

Witold Więsław ,,Matematyka i jej historia".

- Tablice dodawania, pierwiastkowania, odwracania, mnożenia.
- Tablice trójek pitagorejskich Plimpton 322 (tabliczka przygotowawcza do zajęć nauczyciela?)
- Algorytm znajdywania większego pierwiastka równania kwadratowego.
- Rozwiązania niektórych równań sześciennych i dwukwadratowych.
- Tablice pierwiastków sześciennych.
- Przybliżony wzór na obliczanie pierwiastka kwadratowego

$$\sqrt{a^2 \pm b} \approx a \pm \frac{b}{2a}$$

- Początki algebry liniowej. Słowne algorytmy rozwiązań układów równań liniowych.
- Podstawowe typy układów równań z zadań:

$$x \pm y = a, \; xy = b$$

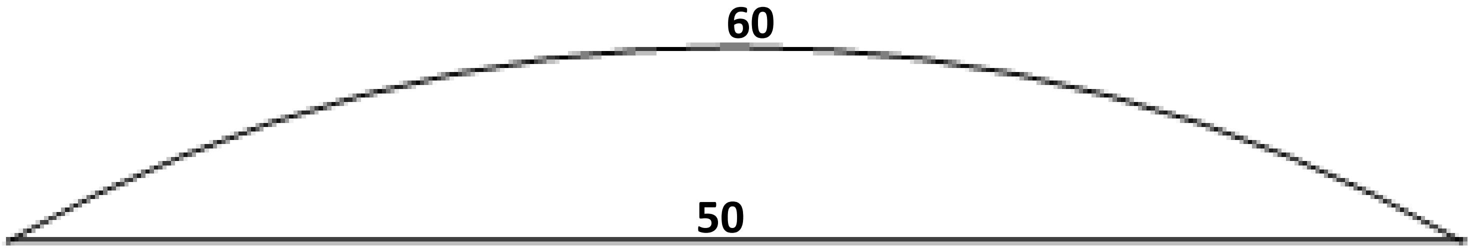
$$x \pm y = a, \; x^2 + y^2 = b$$

Babilońskie zadanie i babilońskie rozwiązanie

S. Kulczycki ,,Z dziejów matematyki greckiej"

- **Zadanie (BM 85194 # 29)**

Odcinek kołowy. Brzeg **60**, cięciwa **50**. Jakie jest pole?

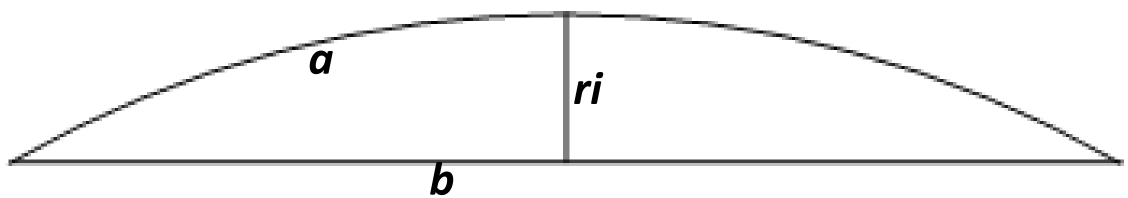


Babilońskie zadanie i babilońskie rozwiązanie

S. Kulczycki ,,Z dziejów matematyki greckiej”

- **Rozwiązanie babilońskie**

  60, brzeg, o ile wychodzi poza **50**?
  O **10** wychodzi.
  50 pomnóż przez **10**.
  500 jak widzisz.
  10 (linię dzielącą, **ri**) podnieś do kwadratu.
  100 jak widzisz.
  1/2 pomnóż przez **100**.
  50 jak widzisz.
  ~~**100** od **500** jest oddalone.~~
  50 od **500** jest oddalone.
  450 jak widzisz jest pole.

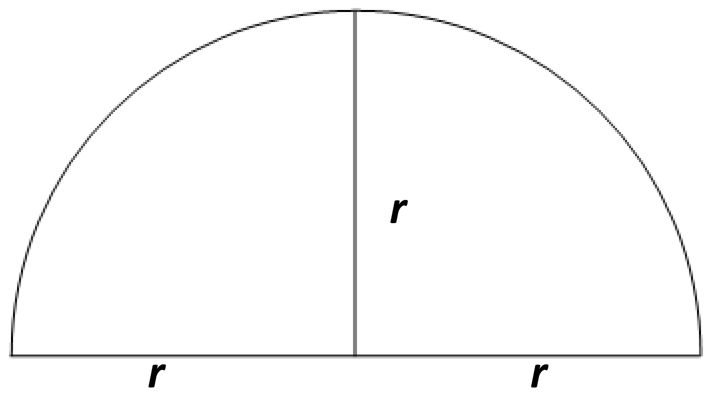


$$(a-b)b-1/2\,(a-b)^2$$

Babilońskie zadanie i babilońskie rozwiązanie

S. Kulczycki ,,Z dziejów matematyki greckiej"

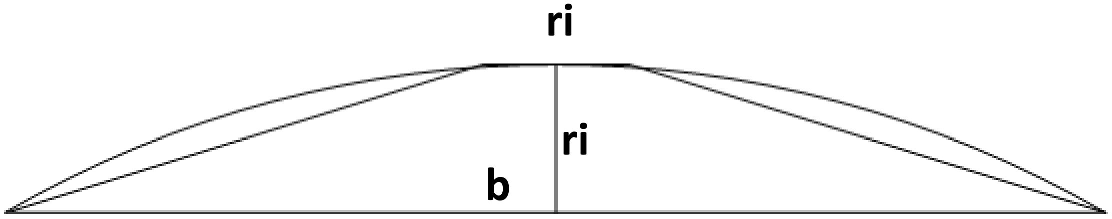
- **Rozwiązanie babilońskie**

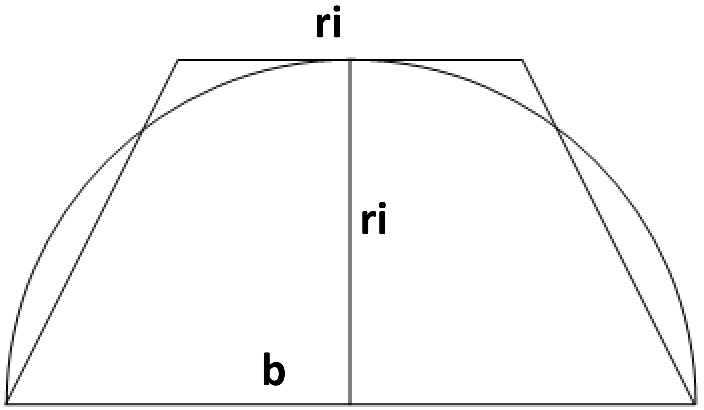


Dla **π=3**. Długość łuku **a=3r**. Średnica **b=2r**. Różnica **r**. Pole półkola **$2r^2$-1/2 r^2=1 ½ r^2.**

Jöran Friberg 'Unexpected links between Egyptian and Babylonian mathematics' World Scientific

- 'BM 85194 # 29 is an isolated exercise ... Unfortunately, the text of the exercise is so corrupt that no conclusion can be safety drawn about what the original author of the exercise try to do.'

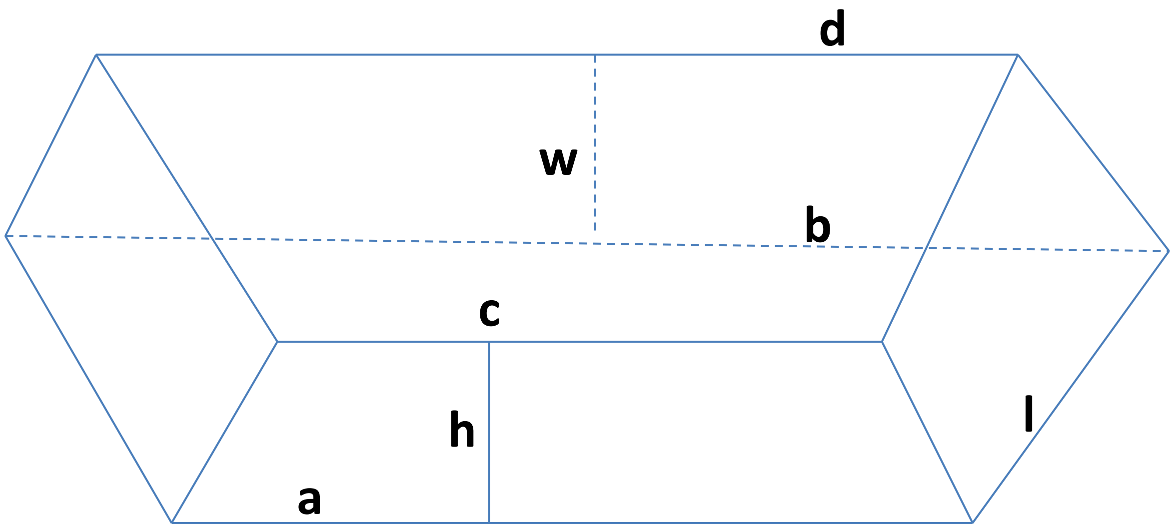




$\frac{1}{2}(b+ri)\ ri$

Matematyka czy informatyka babilońska?

S. Kulczycki ,,Z dziejów matematyki greckiej"



- Objętość nieregularnej pryzmy (uśrednić wszystko)

½l((a+b)/2+(c+d)/2)(h+w)/2

W. Domitrz ,,Krótki kurs historii matematyki''

Metodologia empiryczna.

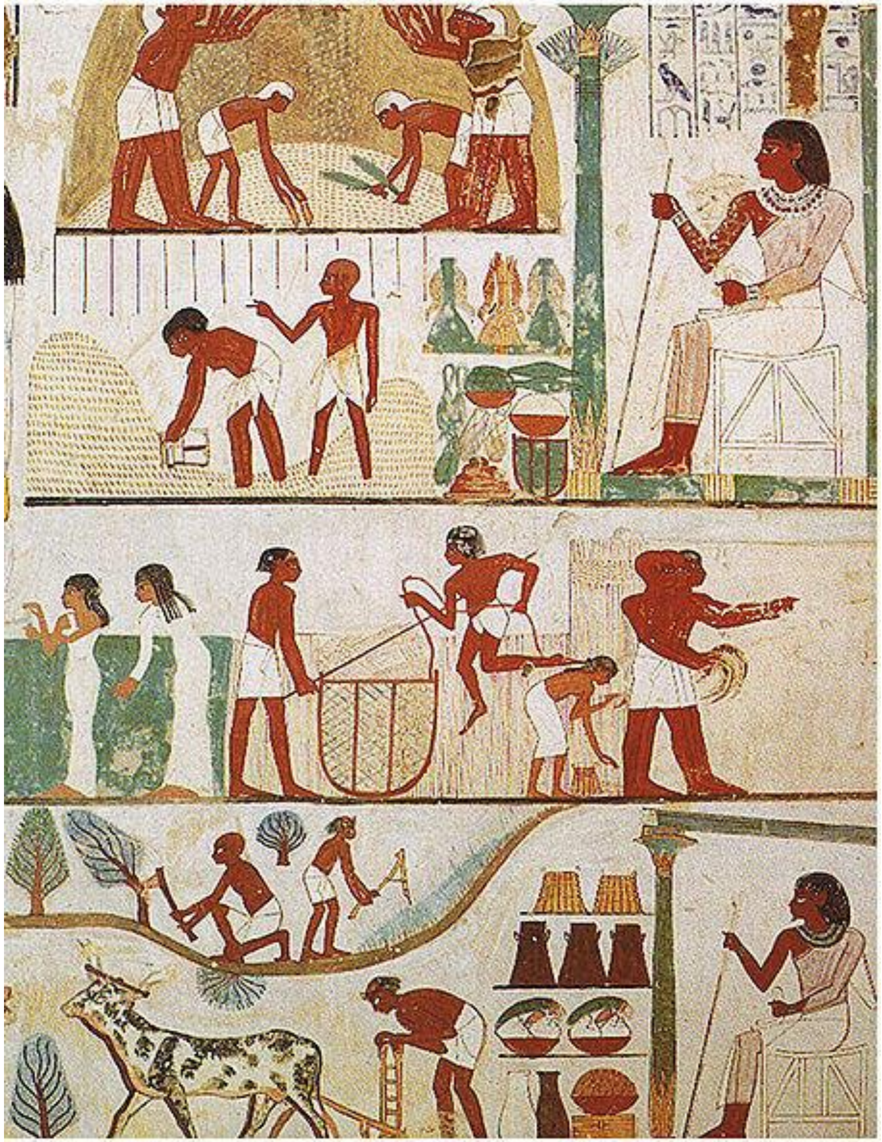
TYLKO ALGORYTMY: „Zrób tak i więc..."

BRAK DOWODÓW! Matematyka czy raczej informatyka?

Starożytny Egipt

(początki ok. 6000 p.n.e. , państwo ok.3100-31 p.n.e.)

autor: Jeff Dahl, Wikipedia



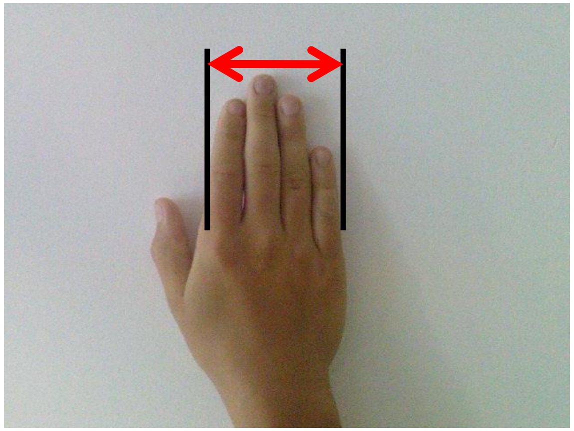
Matematyka egipska

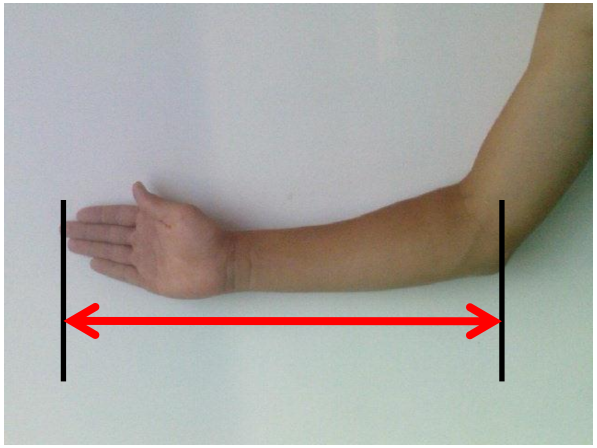
Autor: Ricardo Liberato, All Gizah Pyramids

Liczenie dni między wylewami Nilu. Mierzenie nieregularnych pól.

4 palce = 1 dłoń

7 dłoni = 1 łokieć

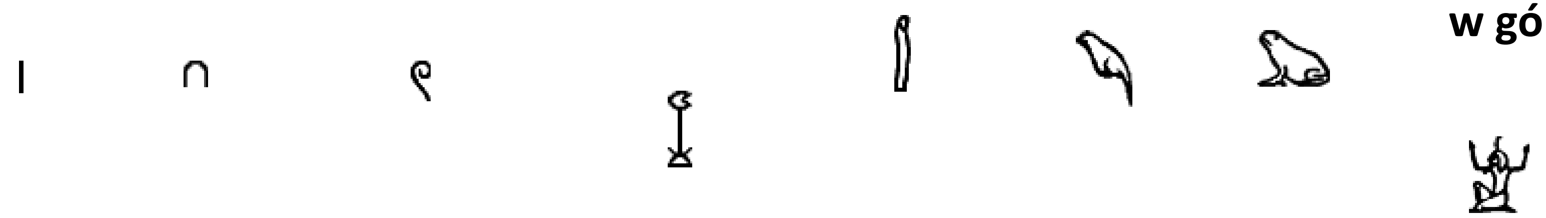




Łokieć ziemi to pas 1 łokieć x 100 łokci

Liczby egipskie

1	10	100	1000	10000	100000	100000	1000000
kreska	pięta	taśma miernicza	kwiat lotosu	palec	kijanka	żaba	człowiek z rękoma w górze

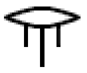


Ułamki

 =1/3

 =1/2

 =2/3

 =3/4

 = 1/120

Jak mnożyli Egipcjanie?

13x11= 143

13	1
26	2
52	4
104	8

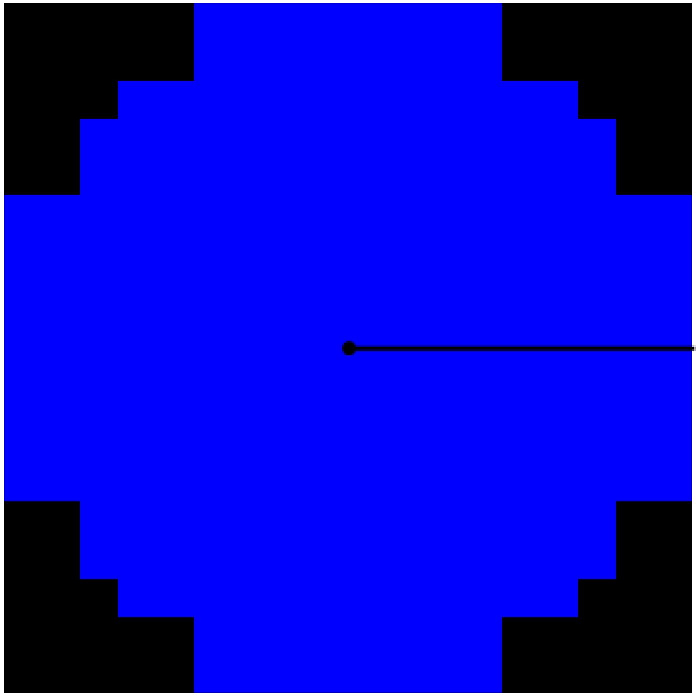
1+2+8=11

13+26+104=143

Papirus Rhinda (ok. 1650 p.n.e., kopia papirusu z ok.2000-1800 p.n.e.)
British Museum EA 10057

$\pi \approx (16/9)^2 \approx 3{,}16...$

Egipskie π(wg Neugebauera)



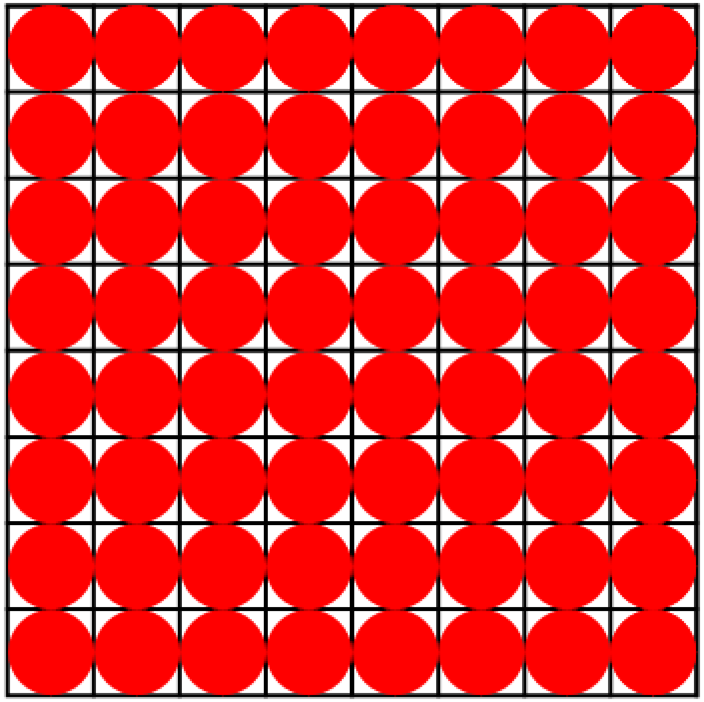
Pole koła o średnicy 9: 9^2 $-4\cdot(9/6)^2$ $-8(9/9)^2$ $=64$

$\pi(9/2)^2 \approx 64$, $\pi \approx (16/9)^2$

W. Domitrz ,,Krótki kurs historii matematyki''

Egipskie $\pi \approx (16/9)^2$

M. du Sautoy, starożytna gra Mankala



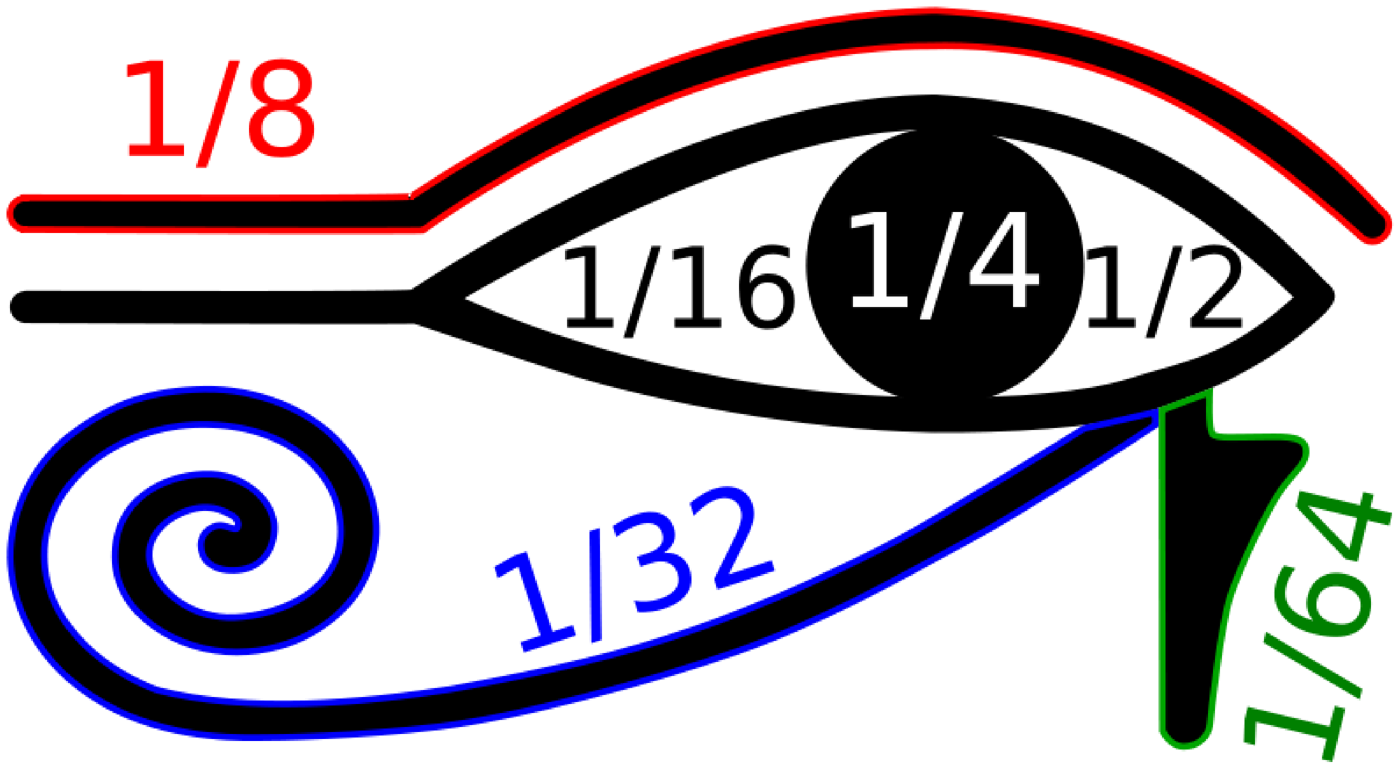
W. Domitrz ,,Krótki kurs historii matematyki''

Każda dodatnia liczba wymierna jest sumą różnych ułamków egipskich czyli ułamków postaci 1/k, gdzie k jest liczbą naturalną.

Papirus Rhinda zawiera między innymi tabelę rozkładu ułamków typu 2/n na ułamki egipskie.

2/3 = 1/2 + 1/6 2/5 = 1/3 + 1/15 2/7 = 1/4 + 1/28 2/9 = 1/6 + 1/18 2/11 = 1/6 + 1/66 2/13 = 1/8 + 1/52 + 1/104 2/15 = 1/10 + 1/30 2/17 = 1/12 + 1/51 + 1/68 2/19 = 1/12 + 1/76 + 1/114 2/21= 1/14 + 1/42 2/23 = 1/12 + 1/276 2/25 = 1/15 + 1/75 2/27 = 1/18 + 1/54 2/29 = 1/24 + 1/58 + 1/174 + 1/232 2/31 = 1/20 + 1/124 + 1/155 2/33 = 1/22 + 1/66 2/35 = 1/30 + 1/42 2/37 = 1/24 + 1/111 + 1/296 2/39 = 1/26 + 1/78 2/41 = 1/24 + 1/246 + 1/328 2/43 = 1/42 + 1/86 + 1/129 + 1/301 2/45 = 1/30 + 1/90 2/47 = 1/30 + 1/141 + 1/470 2/49 = 1/28 + 1/196 2/51 = 1/34 + 1/102 2/53 = 1/30 + 1/318 + 1/795 2/55 = 1/30 + 1/330 2/57 = 1/38 + 1/114 2/59 = 1/36 + 1/236 + 1/531 2/61 = 1/40 + 1/244 + 1/488 + 1/610 2/63 = 1/42 + 1/126 2/65 = 1/39 + 1/195 2/67 = 1/40 + 1/335 + 1/536 2/69 = 1/46 + 1/138 2/71 = 1/40 + 1/568 + 1/710 2/73 = 1/60 + 1/219 + 1/292 + 1/365 2/75 = 1/50 + 1/150 2/77 = 1/44 + 1/308 2/79 = 1/60 + 1/237 + 1/316 + 1/790 2/81 = 1/54 + 1/162 2/83 = 1/60 + 1/332 + 1/415 + 1/498 2/85 = 1/51 + 1/255 2/87 = 1/58 + 1/174 2/89 = 1/60 + 1/356 + 1/534 + 1/890 2/91 = 1/70 + 1/130 2/93 = 1/62 + 1/186 2/95 = 1/60 + 1/380 + 1/570 2/97 = 1/56 + 1/679 + 1/776 2/99 = 1/66 + 1/198 2/101 = 1/101 + 1/202 + 1/303 + 1/606

Oko Horusa



autor: Benoît Stella alias BenduKiwi, Wikipedia

$$\mathbf{1/2+1/4+1/8+1/16+1/32+1/64=1 - 1/64}$$

Podziel 9 bochenków na 10 ludzi.

- **5** bochenków podziel na **2** części (**10x1/2**)
- **4** bochenki podziel na **3** (**10x1/3+2x13**)
- **2** z **1/3** bochenka podziel na **5** (**10x1/15**)
- Każdy otrzyma **1/2+1/3+1/15=9/10**
- Sprawdzenie (po egipsku) **10x(1/2+1/3+1/15)**

1/2+1/3+1/15	**1**
1+2/3+2/15	**2**
2+4/3+4/15	**4**
4+8/3+8/15	**8**

8+2=10

1+2/3+2/15+4+8/3+8/15=

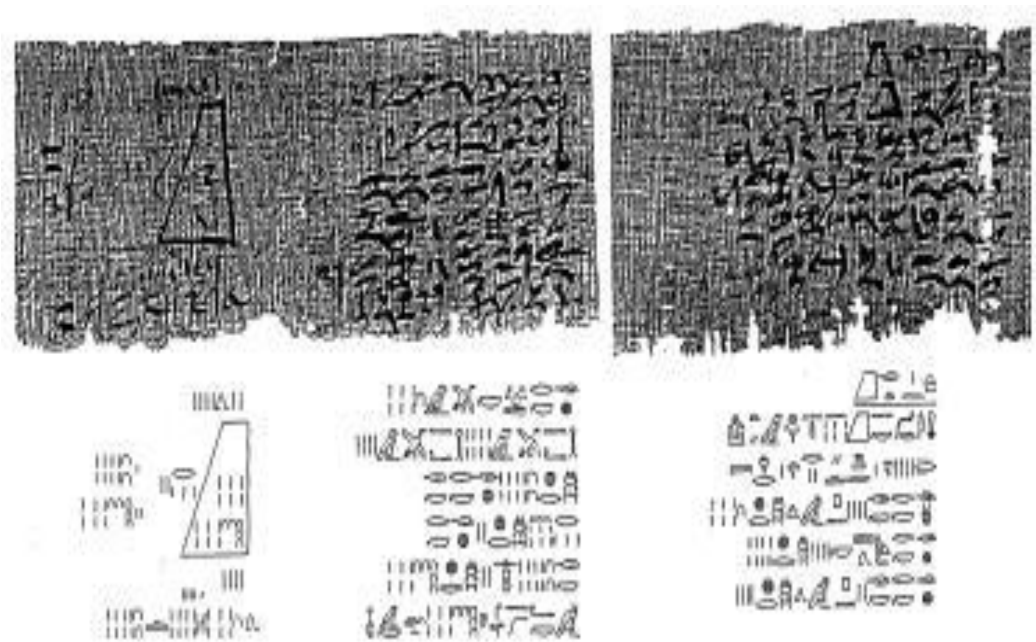
5+10/3+10/15=

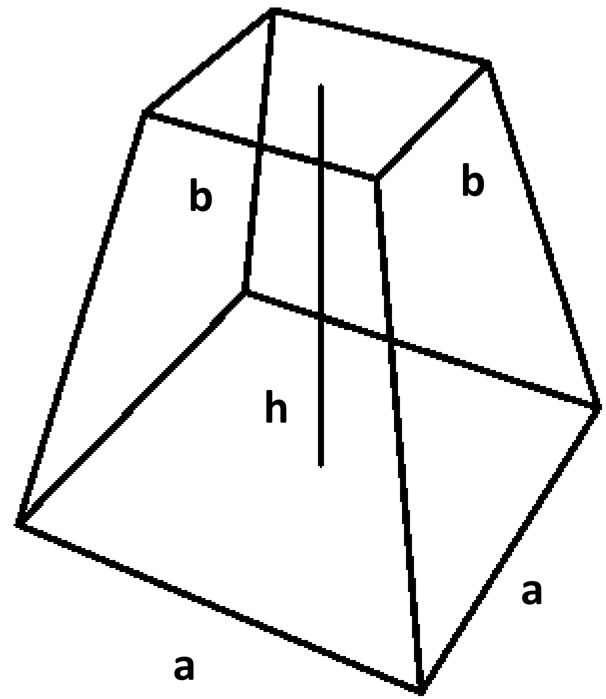
5+10/3+2/3=9

W. Domitrz ,,Krótki kurs historii matematyki''

Papirus Moskiewski(ok.1890 pne)

Muzeum Puszkina





$$V = \frac{1}{3}\,(a^2+ab+b^2)h$$

Praktyczna geometria egipska

Witold Więsław ,,Matematyka i jej historia".

- Pole prostokąta o bokach **a** i **b** to **ab**.
- Pole trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych **a** i **b** to **½ab**.
- Pole trójkąta o bokach **a**, **b** i **c** to **¼(a+c)b**.
- Pole czworokąta o kolejnych bokach **a,b,c,d** to **½(a+c)·½(b+d)**.
- Pole koła o średnicy **d** to $(8d/9)^2$ czyli $\pi = (16/9)^2$.
- Objętość walca to iloczyn pola podstawy i wysokości.
- Objętość piramidy ściętej o kwadratowych podstawach o bokach **a** i **b** oraz wysokości **h** to $\frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)h$.

- **Metodologia empiryczna.**
- **TYLKO ALGORYTMY: „Zrób tak i więc..."**
- **BRAK DOWODÓW!**

Bibliografia

•Marek Kordos ,,Wykłady z historii matematyki” SCRIPT, Warszawa 2006.

•Witold Więsław ,,Matematyka i jej historia”, NOWIK, Opole 1997.

•Ian Stewart ,,Oswajanie nieskończoności. Historia matematyki” Prószyński i S-ka, Warszawa 2010.

•Wikipedia, hasła różne i linki zewnętrzne do nich.

•Denise Schmant-Besserat „Jak powstało pismo?” Agade, 2007.

•Michał Szurek ,,Matematyka dla humanistów” RTW, Warszawa 2000.

•Philip J. Davis, Reuben Hersh ,,Świat matematyki” Warszawa PWN 1994.

•Marcus du Sautoy „The Story of Maths”, Serial BBC4, 2008 (w Polsce ,,Historia matematyki” Planete) http://open2.net/storyofmaths/abouttheseries.html

•Stefan Kulczycki „Z dziejów matematyki greckiej” Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1973.

•Dirk J. Struik „Krótki zarys historii matematyki do końca XIX wieku” Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1963.

•Georges Ifrah „Historia powszechna cyfr” Wydawnictwo WAB, Warszawa 2006.

•„Historia matematyki” pod redakcją A. P. Juszkiewicza, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1975.